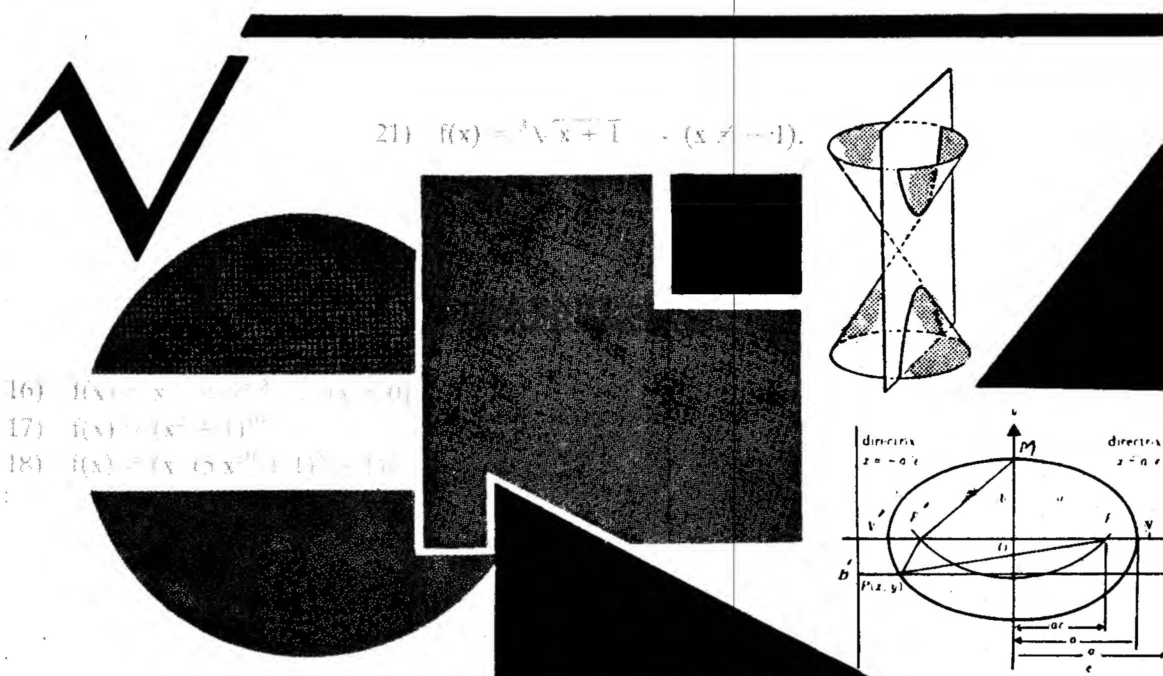
مقدمة في الرياضيات للعلوم والهندسة

- التفاضل
- الجبر
- التكامل
- الهندسة التحليلية

طلعت عبد الناصر   عبد الشافي عبادة   أحمد باروم



دار الشروق جدة
للنشر والتوزيع والطباعة
برقيا: مشكاتنا - ص.ب: ٤١٤٦

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين .

يعتبر هذا الكتاب مقدمة فى **التحليل الرياضى** . ولأهمية هذا الموضوع وتداخله فى المجالات الرياضية المختلفة فلقد وضعنا نصب أعيننا أن نسوق البراهين فى غير تعقيد وبدون اسهاب ، وحاولنا أن نبسط المواضيع دون تفريط فى الدقة الرياضية المتطلبة .

ويحتوى هذا الكتاب بين دفتيه مجموعة من الموضوعات المختارة والمتسقة ، اذ يبدأ بعرض لبعض المعلومات عن جبر الفئات وذلك فى الباب الأول . ينبنى على هذه المعلومات التعريفات الأساسية للعلاقات والدوال التى يتضمنها الباب الثانى وفيه تفصيل لبعض خواص الدوال كثيرة الحدود والدوال المسترسلة وعلى الأخص المثلثية .

والباب الثالث يناقش مبدأ النهايات ويتم عرض النظريات الخاصة بهذا الموضوع مبتدئين بنهايات دوال كثيرة الحدود ثم الدوال المثلثية وبعض الدوال المسترسلة الأخرى ، يعقب ذلك باب التفاضل وهو تطبيق مباشر لمبدأ النهايات فتوضح كيفية اجراء عمليات التفاضل ، وفى الباب الخامس تطبيقات على التفاضل فى المجالات التكنولوجية والفيزيائية .

اما الباب السادس فهو يقدم التكامل وتعريفه كعملية نهاية ثم الربط بين عمليتى التفاضل والتكامل . وفى الباب السابع بعض التطبيقات على التكامل كايجاد المساحات المحصورة والحجوم والمساحات الدورانية .

نعود الى الدوال المسترسلة فى الباب الثامن حيث نناقش الدوال الزائدية وخواصها واجراء عمليات التفاضل والتكامل لمثل هذه الدوال ويتبعه الباب التاسع الذى يحتوى على مفكوكات الدوال .

أما الباب العاشر ففيه عود الى التكامل حيث نناقش بالتفصيل مجموعة من الطرق المستخدمة فى اجراء عمليات التكامل .

والبابان التاليان وهم الحادى عشر والثانى عشر فيضمان موضوعات

تمت الى الجبر وهى الأعداد المركبة بتعريفها وبعض الدوال المعرفة على المستوى المركب ونظرية دى موافر وحل كاردان لمعادلة الدرجة الثالثة وحل فيرارى لمعادلة الدرجة الرابعة ونعرض لموضوع المحددات بعد ذلك حيث نعرف محــددات الدرجة الثانية وخواصها ثم محــددات الدرجة الثالثة وطريقة استخداماتها فى حل المعادلات المتوائمة .

أما الباب الأخــير فهو مخصص للهندســة التحليلية حيث نتعرض بالتفصيل لخواص القطاعات المخروطية وهى المكافىء والناقص والزائد ، كما يتفرد منها بعض المنحنيات الخاصة وكذلك نتعرض للمنحنيات التى تمثل معادلة الدرجة الثانية .

وبهذا الباب يختتم هذا المنهج ونرجو من الله سبحانه وتعالى أن يكون هــذا المنهج مفيــدا وميسرا ، والله نسأل أن يوفقنا ويهدينا الى ســواء السبيل .

المؤلفون

الباب الأول

الفئات SETS

بند ١ ـ ١ : مبادىء أولية :

يعتبر موضوع الفئات من أبسط المواضيع فى مادة الرياضيات . حيث أن أهميتها فى مادة الرياضيات اعتبرت لأول مرة بواسطة العالم الرياضى جورج كانتور (١٨٥٤ ـ ١٩١٨) . ولا تعتبر الفئات فى حد ذاتها من الموضوعات الجديدة فحسب بل تعتبر أيضا اداة هامة ساعدت الرياضيين فى النظر الى فروع الرياضيات المختلفة بأساليب واسس جديدة حيث تمكنوا من دراسة أنظمة الأعداد Number Systems ونظرية الدوال Theory of Functions والمنطق الرياضى Mathematical logic والجبر التجريدى Abstract Algebra وعلوم الهندسات المختلفة ومادة التوبولوجى Topology .فجبر الفئات فى يومنا هذا يعتبر اداة رئيسية فى الرياضيات الحديثة.وحياتنا اليومية مليئة بالعديد من الأمثلة العملية التى تتضمن مفهوم الفئات ونذكر بعضها فيما يلى :

مثال (١) :

١ ـ فئة طلبة هذه الجامعة .

٢ ـ فئة طلبة كلية العلوم بالجامعة .

٣ ـ فئة الخطوط المستقيمة التى تلتقى فى نقطة معينة .

٤ ـ فئة الحروف التى تكون MOHAMED

٥ ـ فئة مدن هذا القطر التى يزيد عدد سكانها على **10.000** نسمة .

٦ ـ فئة النقط التى تقع على خط مستقيم معين .

ومن الأمثلة السالفة تستطيع استنتاج التعريف التالى :

١ ـ ١ ـ ١ تعريف :

الفئة Set هى عبارة عن تجمع Collection من الأشياء بحيث تكون هذه الأشياء معرفة تعريفا كاملا . وذلك لتجنب حدوث أى شك فيما اذا كان احد هذه الأشياء ينتمى أو لاينتمى الى هذه الفئة .

تسمى الأشياء التى تنتمى الى فئة معينة بعناصر هذه الفئة Elements أما الأشياء التى لاتنتمى الى هذه الفئة فلا تعتبر من عناصرها . ومن المصطلح عليه التعبير عن عناصر اى فئة بالحروف الانجليزية الصغيرة أو الأرقام أما الحروف الانجليزية الكبيرة فيصطلح على استعمالها لأسماء هذه الفئات .

فاذا أردنا القول أن عنصرا ما ينتمى الى فئة معينة نستعمل الرمز « $\in$ » فمثلا اذا كانت « b » احد العناصر التى تنتمى الى الفئة « B » فاننا نعبر عن ذلك كتابة « $b \in B$ » وهذا هو اختصار القول أن « b » عنصر من عناصر الفئة « B » وتقرأ « b تنتمى الى الفئة B » أو « b تتبع الفئة B » .

أما اذا كانت « c » ليست بعنصر من عناصر الفئة « B » فاننا نعبر عن ذلك بكتابة « $c \notin B$ » . واما اذا أردنا أن نعبر عن الفئات فانه توجد طريقتان لأداء هذا الغرض نلخصهما فيما يلى :

اولا ـ طريقة الجرد Roster Method :

تتلخص هذه الطريقة فى جرد (اى كتابة) جميع العناصر التى تتكون منها الفئة ـ اذا أمكن ذلك ـ عنصرا تلو الآخر . أو جرد تلك العناصر بطريقة معينة بحيث يمكن استنتاج بقية العناصر الأخرى ، وبحيث تكون هذه العناصر محصورة بين قوسين كبيرين .

مثال (٢) :

١ ـ فئة الأعداد الصحيحة (Integers)

$$I = \{ \ldots.., -2, -1, 0, 1, 2, \ldots. \}$$

٢ ـ فئة الأعداد الطبيعية (Natural Nos)

$$N = \{ 1, 2, 3, \ldots. \}$$

٣ ــ فئة الاعداد الزوجية الموجبة

$E+ = \{ 2, 4, 6, ... \}$

٤ ــ فئة الأعداد الفردية الموجبة

$O+ = \{ 1, 3, 5, ... \}$

٥ ــ فئة الاعداد الصحيحة المحصورة بين 7,0 :

$Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}.$

١ ــ ١ ــ ٢ ملاحظة :

(أ) يجب أن نلاحظ عند استعمال طريقة الجرد ان لا أهمية للترتيب الذى تكتب به عناصر الفئات ، اذ يمكننا كتابة الفئة Y السابقة كالتالى :

$$Y = \{ 1, 3, 5, 2, 6, 4 \}$$

الا انه يستحسن كتابة عناصر الفئة بتسلسل منطقى كلما أمكن ذلك .

(ب) نلاحظ اننا قد استعملنا « .... » فى الفئات المكتوبة فى المثال السابق وهذا يدل على أن قائمة عناصر هذه الفئات لم تنته بعد وان هناك عناصر اخرى تنتمى اليها .

ثانيا ــ الطريقة الوصفية Rule Method :

تتلخص هذه الطريقة فى ايجاد علاقة رياضية أو خاصية معينة تربط بين الصفة (أو الصفات) المشتركة بين عناصر الفئة المراد التعبير عنها بحيث يمكن عن طريقها وصف جميع عناصر هذه الفئة . كما هو واضح فى الأمثلة الآتية :

مثال (٣) :

١ ــ فئة الأعداد القياسية (الكسرية) (Rational Nos.)

اى الأعداد التى يمكن التعبير عنها بكسور اعتيادية يمكن وصفها فى الصورة .

$$M = \{ x : x = \frac{a}{b} \; ; a, b \in I \, , \, b \neq O \}.$$

٢ ـ فئة الاعداد غير القياسية Irrational nos أى فئة الأعداد التى لا يمكن التعبير عنها ككسور اعتيادية . ويمكن وضعها كما يلى :

$$G = \{ x : x \neq (a/b) \; ; a, b \in I , b \neq 0 \}$$

٣ ـ فئة الاعداد الصحيحة المحصورة بين 8 ,3− هى الفئة :

$$X = \{ x : x \in I , -3 < x < 8 \}$$

وتقرأ « X = x حيث x تنتمى الى الفئـــــة I اكبر من (3−) واقل من 8 »

٤ ـ فئة الأعداد الزوجية الأقل من 10 هى الفئة

$$Y = \{ y : y = 2n + 2 , n \in I , y < 10 \}$$

وهنا تجدر الملاحظة أن هناك بعض الفئات التى لايمكن التعببير عنها الا بطريقة واحدة فقط من الطريقتين السابقتين وهذا يتضح لنا من الأمثلة الآتية :

مثال (٤) :

من الصعب (ان لم يكن من المستحيل) كتابة الفئة الآتية :

M = { m : m is a pasitive fraction between 1 , 2 }

بطريقة الجرد ، لأن عدد عناصر هذه الفئة لا نهائى .

مثال (٥) :

ومن الصعب أيضا كتابة الفئة التالية بالطريقة الوصفية .

S = { ball, pen, cat, car, man }

اذا اعدنا النظر الآن الى الفئات المختلفة فى الأمثلة السابقة نلاحظ أن عدد عناصر كل منها يختلف من فئة الى اخرى . فاذا احتوت الفئة على عدد محدود من العناصر وليكن عددها n مثلاحيث n عدد صحيح موجب فان هذه الفئة تسمى بالفئة المحدودة Finite Set ، أما اذا كان عـــدد عناصرها لا نهائيا فان الفئات فى هذه الحالة تسمى بالفئـــــات اللانهائية . Infinite Sets

١ ــ ١ ــ ٣ ملاحظة :

عند هذه النقطة يجب علينا التمييز بين الرمزين { a } , « a » يدل الرمز الأول على الفئة المحدودة المكونة من عنصر واحـــد « a » وتسمى الفئة ذات العنصر الواحد أما الرمز الثانى فيمثل العنصر « a » نفســه .

ومن ثم نلاحظ انه بوسعنا كتابة $a \in \{ a \}$ بينما لايمكننا كتابة $\{ a \} \in a$.

بند ١ ــ ٢ الفئات الجزئية Subsets :

اذا كانت لدينا الفئتين :

$$A = \{ 0, 1, 2, 3 \} , \quad B = \{ 0, 3, 6, 1, 5, 7, 2 \}$$

فاننا نلاحظ أن جميع عناصر الفئة « A » تنتمى أيضا الى الفئة « B » اى أن الفئة « B » تحتوى الفئة « A » . وهذه الحالة يعبر عنها رمزيا « $A \subset B$ » وتقرأ « A » فئة جزئية للفئة « B » OR « B » تحتوى « A .

١ ــ ٢ ــ ١ تعريف : الفئة الجزئية Subsets :

تعتبر الفئة « A » فئة جزئية من « B » اذا كان كل عنصر من عناصر الفئة « A » ينتمى الى الفئة « B » ويرمز له بالرمز « $A \subset B$ »

١ ــ ٢ ــ ٢ تعريف : الفئة الجزئية الخالصة Proper Subset :

تعتبر الفئة « A » فئة جزئية خالصـــة للفئة « B » اذا كان كل عنصر من عناصر الفئة « A » ينتمى الى الفئة « B » ولكن هناك عناصر تنتمى الى الفئة « B » ولا تنتمى الى الفئة « A » ويرمز للفئة الجزئية الخالصة بالرمز « $A \subset B$ » .

أما اذا كانت بعض عناصر الفئة « A » لا تنتمى الى الفئة « B » وكذلك هناك عناصر من الفئة « B » لا تنتمى الى الفئة « A » ، اى أن الفئة « A » لا تحتوى الفئة « B » وكذلك الفئة « B » لا تحتوى الفئة « A » فاننا نعبر عن هذا رمزيا « $A \not\subset B$ » . وهذا يعنى أن هنـــاك عنصرا واحدا على الأقل من عناصر الفئة « A » لا ينتمى الى عناصر الفئة « B » .

مما سبق يمكننا ان نستنتج النتائج الآتية :

نتيجة (١) :

١ ـ « $A \subset A$ » وذلك صحيح لأى فئة « A »

٢ ـ اذا كانت « $A \subset B$ » و « $B \subset C$ » فان $A \subset C$.

٣ ـ اذا كانت « $A \subseteq B$ » و « $B \subseteq A$ » فان $A = B$.

ومن السهل على القارىء برهنة النتائج السابقة .

١ ـ ٢ ـ ٣ تعريف ـ الفئة الشاملة Universal Set :

الفئة الشاملة هى الفئة التى تشمل عناصرها جميع عناصر الفئات الجزئية ويرمز لها بالرمز U

مثال (١) :

اذا كان :

$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 4, 5 \}$,

$C = \{ 4, 2, 7 \}$ $D = \{ 0, 6 \}$,

فان الفئة الشاملة لهذه الفئات هى الفئة :

$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$.

١ ـ ٢ ـ ٤ ـ تعريف الفئات المنفصلة Disjoint Sets :

تعتبر الفئتان « A , B » منفصلتان اذا لم يوجد هناك عناصر مشتركة بينهمـــا والعكس صحيح . التعريف الأخير يعنى ان الفئتين « A , B » فئتان منفصلتان اذا كان $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ وبالعكس . ومن هنا تنتج فئة جديدة فى غاية الأهمية تسمى بالفئة الفارغة Empty Set سنتعرض لتعريفها فيما يلى :

١ ـ ٢ ـ ٥ تعريف : الفئة الفارغة Empty Set :

الفئة الفارغة هى الفئة التى لا تحتوى على اى عنصر على **الاطلاق** ويرمز لها بالرمز ϕ OR $\{ \ \}$.

مثال (٢) :

فئة الدول الأمريكية التى تقع فى القــــارة الأفريقية هى عبارة عن الفئة الفارغة ‎$\phi = \{ \cdot \}$‎ ·

مثال (٣) :

فئة الأعداد الصــــــحيحة الموجبة الواقعة بين العددين 1 , 0 هى عبارة عن الفئة الفارغة.

$$\phi = \{ x : x \in I ; 0 < x < 1 \} = \{ . \}$$

مثال (٣) :

١ ـ ٢ ـ ٦ ملاحظة :

١ ـ تعتبر الفئة الفارغة من الفئات المحدودة .

٢ ـ تعتبر الفئة الفارغة فئة جزئية لأى فئة اخرى .

مثال (٤) :

اوجد الفئات الجزئية لكل من الفئات التالية :

اولا : ‎$A = \{ 1 \}$‎ **ثانيا :** ‎$B = \{ 1 , 2 \}$‎ :

ثالثا : ‎$C = \{ 3, 1, 2 \}$‎ **رابعا :** ‎$D = \{ 1, 2, 3, 4 \}$‎ .

الحـل :

اولا ـ الفئات الجزئية للفئة A هى :

$$A_1 = \phi \quad , \quad A_2 = \{ 1 \} = A$$

ثانيا ـ الفئات الجزئية للفئة ‎$B = \{ 1, 2 \}$‎ هى :

$$B_1 = \phi , B_2 = \{ 1 \} , B_3 = \{ 2 \} , B_4 = \{ 1, 2 \} = B$$

ثالثا ـ الفئات الجزئية للفئة ‎$C = \{ 3, 1, 2 \}$‎ هى :

$$C_1 = \phi , C_2 = \{ 1 \} , C_3 = \{ 2 \} , C_4 = \{ 3 \}$$

$$C_5 = \{ 1, 2 \} , C_6 = \{ 1, 3 \} , C_7 = \{ 2, 3 \} ,$$

$$C_8 = \{ 1, 2, 3 \} = C$$

رابعا ــ الفئات الجزئية للفئة $D = \{1, 2, 3, 4\}$ هى كالتالى :

$D_1 = \phi$, $D_2 = \{1\}$. $D_3 = \{2\}$,

$D_4 = \{3\}$, $D_5 = \{4\}$

$D_6 = \{1, 2\}$ $D_7 = \{1, 3\}$

$D_8 = \{1, 4\}$ $D_9 = \{2, 3\}$

$D_{10} = \{2, 4\}$, $D_{11} = \{3, 4\}$,

$D_{12} = \{1, 2, 3\}$, $D_{13} = \{1, 2, 4\}$

$D_{14} = \{1, 3, 4\}$ $D_{15} = \{2, 3, 4\}$

$D_{16} = \{1, 2, 3, 4\} = D$

من هذا المثال نلاحظ أن هذه الفئــات الجزئية التى يمكن تكوينها للفئة التى عدد عناصرها « n » (حيث « n » عدد صحيح موجب) هى « 2^n » ففى الفقرة الأولى من السؤال نجد ان عدد الفئات الجزئية هو « 2^1 » وفى الفقرة الثانية هو « 2^2 » وفى الفقرة الثالثة هو « 2^3 » واخيرا فى الفقرة الرابعة فالعدد هو $2^4 = 16$

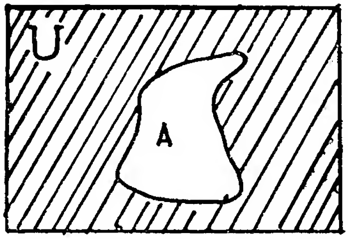
بند ١ ــ ٣ : العمليات المستعملة على الفئات :

قبل البدء فى النظر الى العمليات التى يمكن استعمالها على الفئات نود أن نشرح طريقة نستطيع من خلالها تكوين صــــورة مرئية للفئات . فالصور المرئية تعتبر وسيلة مساعدة من الوسائل التى يلجأ اليها العلماء لتوضيح المواد العلمية ، اذ تساعد عادة على تفهم المسائل واقتراح الحلول المناسبة . والفئات يمكن تمثيلها بأشكال مغلقة كالمســـتطيلات والدوائر والمربعات والأشكال الهندسية الأخرى . وتسمى هذه الأشكال بأشكال ڤن Venn Diagrams وستظهر هذه الفكرة بوضوح فى الأشــكال المرافقة للتعاريف التالية :

١ ــ ٣ ــ ١ تعريف : الفئة المتممة Complement Set

الفئة المتممة للفئة « A » هى الفئة التى يرمز لها بالرمز « A′ » وتعرف كالتالى :

$$A' = \{x : x \notin A , x \in U\}.$$



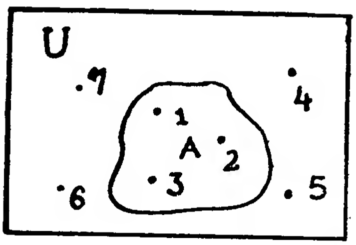
الفئة المتممة

مثال (١) :

اذا كانت :

$A = \{ 1, 2, 3 \} \quad , \quad U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

فان $A' = \{ 4, 5, 6, 7 \}$



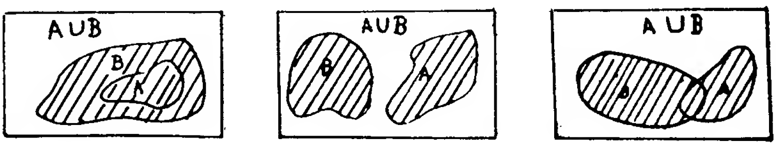
١ - ٣ - ٢ تعريف الاتحاد UNION :

اتحاد فئتين A , B هو الفئة التى عناصرها تنتمى الى الفئة A أو الفئة B أو كليهما معا ، ويرمز لها بالرمز $A \cup B$ وتعرف كالتالى :

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ or } x \in B \}$$

١ - ٣ - ٣ ملاحظة :

يجب أن نلاحظ أن $A \cup B = B \cup A$ ، كما هو واضـــح من الأشكال التالية .



مثال (٢) :

اذا كانت :

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad , \quad B = \{ 2, 4, 6, 7 \}$

فان : $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 7 \}$.

مثال (٣) :

اذا كانت :

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad , \quad B = \{ 6, 7 \}$

فان : $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 7 \}$.

مثال (٤) :

اذا كانت :

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad , \quad B = \{ 2 , 4 \}$

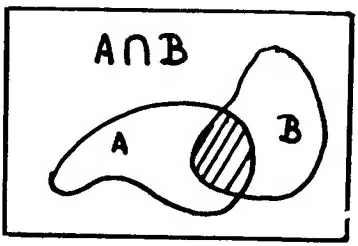
فان : $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

١ ـ ٣ ـ ٤ التقاطع Intersection :

تقاطع فئتين هو الفئة التى عناصرها تنتمى الى الفئة الأولى (A مثلا) وفى نفس الوقت تنتمى الى الفئة الثانية (B مثلا) . ويرمز لها بالرمز $A \cap B$ وتعرف كالتالى :

$$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ and} \in B \} .$$

وزيادة فى الايضاح يمثل الجزء المظلل فى الشـــكل المقابل تقاطع الفئتين A , B أى $A \cap B$



١ ـ ٣ ـ ٥ ملاحظة :

١ ـ يجب أن نلاحظ أن

$B \cap A = A \cap B$ كما هو واضح من الشكل .

٢ ـ فى حالة كون عنصر ما (أو عناصر) ينتمى الى كلا الفئتين فيجوز فى هذه الحالة كتابة الفئة $A \cap B$ مع ملاحظة عدم تكرار كتابة العنصر (أو العناصر) المتكررة .

مثال (٥) :

اذا كانت :

$$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

$$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} \quad , \quad Y = \{ 1, 2, 3, 6 \}$$

$$Z = \{ 3, 4, 6, 8 \} \quad \text{and} \quad W = \{ 4, 7, 8 \}$$

فان :

$$X \cup Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \quad , \quad X \cap Y = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$Y \cup Z = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8 \} \quad , \quad Y \cap W = \phi$$

$$Z \cup X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \} \quad , \quad Z \cap X = \{ 3, 4 \}$$

$$X' = \{ 6, 7, 8 \} \quad , \quad Y' = \{ 4, 5, 7, 8 \}$$

$$Z' = \{ 1, 2, 5, 7 \} \quad , \quad W' = \{ 1, 2, 3, 5, 6 \}$$

$$X' \cup Y' = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \} \quad , \quad (X \cap Y)' = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

$$X' \cap Y' = \{ 7, 8 \} \quad , \quad (X \cup Y)' = \{ 7, 8 \}$$

$$X \cup (Y \cap Z) = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$(X \cup Y) \cap (X \cup Z) = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} .$$

$$X \cap (Y \cup Z) = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$(X \cap Y) \cup (X \cap Z) = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$(X \cap Y)' \cup (X \cup Y)' = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

$$(X \cap Y)' \cap (X \cup Y)' = \{ 7, 8 \} \; , \; (X' \cap Y') \cap Z' = \{ 7 \}$$

$$X' \cup Y' \cup Z' = \{ 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 \}$$

$$U' = \phi \quad , \quad \phi' = U$$

$$U \cup X = U \quad , \quad X \cup \phi = X$$

$$U \cap X = X \quad , \quad X \cap \phi = \phi .$$

نلاحظ مايلى :

$$X' \cup Y' = (X \cap Y)'$$

$$X' \cap Y' = (X \cup Y)'$$

ويمكن استخدام اشكال ڤن فى الحصول على هذه النتائج .

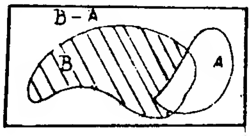
١ ـ ٣ ـ ٦ تعريف الفرق بين الفئات Difference Set :

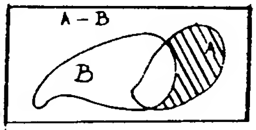
الفرق بين الفئتين A, B هو الفئة التى تنتمى الى الفئة الأولى فقط ويرمز لها بالرمز A — B وتعرف كالتالى :

$$A - B = \{ x : x \in A , x \notin B \} .$$

بينمــا : $B - A = \{ x : x \in B , x \notin A \} .$

وزيادة فى الايضاح يمثل الجزء المظلل فى الشــكلين التاليين الفرق بين الفئتين A — B , B — A على الترتيب .





١ ـ ٣ ـ ٧ ملاحظة :

من الأشكال السابقة نلاحظ أن A — B لاتساوى B — A

مثال (٦) :

اذا كان : $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $B = \{ 1, 2, 5, 6, 7 \}$

فان : $A - B = \{ 3, 4 \}$

$$B - A = \{ 5, 6, 7 \}$$

١ ـ ٣ ـ ٨ تعريف ـ حاصل الضرب الكرتيزى
CARTISIAN PRODUCTS :

حاصل الضرب الكرتيزى لفئتين X , Y هو الفئة التى عنــاصرها عبارة عن عناصر زوجية الترتيب (ordered pairs) يرمز لها بالرمز X × Y او Y × X وتعرف كالآتى :

$$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X , y \in Y \}$$

$$Y \times X = \{ (y, x) : y \in Y , x \in X \}$$

١ ــ ٣ ــ ٩ ملاحظة :

نلاحظ أن عناصر فئة حاصل الضرب الكرتيزى تتكون من عناصر زوجيــــة الترتيب فالعنصر زوجى الترتيب (x, y) ينتمى الى فئة حاصل الضرب $X \times Y$. بينما العناصر (y, x) ينتمى الى $Y \times X$

مثال (٧) :

اذا كانت : $X = \{0, 1\} \quad , \quad Y = \{2, 3, 4\}$

فان :

$$X \times Y = \{ (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4) \}$$

$$Y \times X = \{ (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), 4, 1) \}$$

$$X \times X = \{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \}$$

$$Y \times Y = \{ (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4) \}.$$

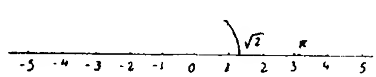
١ ــ ٣ ــ ٩ ــ ملاحظة :

نلاحظ من المثال السابق أن :

$X \times Y \neq Y \times X$ الا اذا كانت $X = Y$

بند ١ ــ ٤ : خط الأعداد الحقيقية REAL NUMBER LINE :

تتكون فئـــة الأعـــداد الحقيقيـــة (set of Real Numbers) من الأعداد الموجبة والسالبة والصفر (وهى تشـــمل الأعداد الصحيحة Integers ، والأعداد القياسية .Rational Nos ، والأعـــداد غير القياسية .Irrational Nos) ويرمز لهـــا بالرمز «R» وأى عدد من هذه الأعداد يمكن تمثيله بنقطة على خط مستقيم يسمى « خط الأعداد الحقيقية Real nos, line »



شكل ١ ــ ٤ ــ ١ خط الأعداد الحقيقية

وللقيام بهذا التمثيل نتبع الخطوات الآتية :

١ ــ يؤخذ خط مستقيم (افقيا كان ام راسيا) يمتد من (∞ —) الى (∞ +)

٢ ــ نفترض نقطة الأصل origin ولتكن الصفر عند منتصف هذا المستقيم .

٣ ــ نأخذ مسافة معينة ومعقولة عن يمين نقطة الأصل (0) ونضع على المستقيم الرقم «1» وتعتبر المسافة بين « O » , « 1 » وحدة قياسية واحدة .

٤ ــ نكرر نفس العملية الموضحة فى الخطوة (٣) عن يمين آخر نقطة توصلنا اليها بنفس وحدة القياس المأخوذة سابقا ويوضع الرقم 2 وهكذا .

٥ ــ بنفس الخطوات سالفة الذكر (٣ ، ٤) نكرر العمليات مرة اخرى ولكن فى هذه المرة تتم العمليات المذكورة على يسار نقطة الأصل .

وبهذه الطريقة نكون قد مثلنا الأعداد الصحيحة بنقاط معينة على الخط المستقيم وبطريقة مماثلة يمكننا تمثيل الأعداد القياسية بنقط على هذا الخط فأى عدد قياسى وليكن ($\frac{1}{2}$) مثلا يمثل بنقطة تقع فى منتصف المسافة بين 1 ,0 . اى ان أى عدد قياسى يمكن تمثيله على خط الأعداد الحقيقية .

ويمكننا تطوير هذه الطريقة لتمثيل أى عدد غير قياسى على هذا الخط . فمثلا لنأخذ عددا غير قياسى وليكن $\sqrt{2}$ مثلا . فيمكن تمثيل هذا العدد اذا أدينا التالى :

نأخذ عمودا طوله وحدة قياسية عند النقطة 1 ونوصل نهاية هذا العمود بالنقطة O فاذا رسمنا قوسا من دائرة مركزها O ونصف قطرها هو طول المستقيم الذى يصل بين O ونهاية العمود فان تقاطع القوس مع خط الأعداد الحقيقية يمثل العدد $\sqrt{2}$ ومن ثم نرى أنه يمكن تمثيل أى عدد غير قياسى بنقطة على الخط المستقيم . وعليه نرى ان الأعداد الحقيقية يمكن تمثيلها بنقط على الخط المستقيم والعكس صحيح .

نود أن نطور العملية سابقة الذكر للوصول الى نظام آخر . فمن

دراسة سابقة لمادة الرياضيات (نظرية الفئات) وفى بند ١ ــ ٣ ــ تطرقنا الى تعريف حاصـــل الضرب الكرتيزى لمجموعتين Y , X حيث نحصر اهتمامنا هنا عندما تكون الفئتان المذكورتان متساويتين أى $X = Y$ وبالأخص عندما تكون مساوية لفئة الأعداد الحقيقية وبذلك يكون لدينا

$$R \times R = \{ (x, y) \ ; x \in R, y \in R \}$$

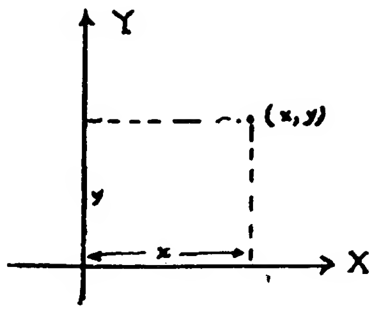
وكل عنصر من عناصر هــذه الفئة الأخيرة عبارة عن عنصر زوجى الترتيب ــ كما سبق وذكرنا $(x . y)$ حيث $x, y \in R$ وأى عنصر من عناصر هذه الفئة سوف يمثل بنقطة فى المستوى الاقليدى المتعامد XY والعكس صحيح .وللقيام بهذا التمثيل سنتعرف الى نظام الاحداثيات الكرتيزية المتعامدة فيما يلى :

بند ١ ــ ٥ : الاحداثيات الكرتيزية المتعامدة Cartisian Coordinates :

نأخذ خطا مستقيما أفقيا ممتدا من $(-\infty)$ الى $(+\infty)$ ونرسم خطا آخر راسيا بحيث يتقاطع الخطان فى نقطة (0) اصطلح على تســـميتها نقطة الأصل origin أو المركز وتمثل العنصر $(0, 0)$

يمثل جزء الخط المستقيم الأفقى الواقع على يمين نقطة الأصل فئة الأعداد الحقيقية الموجبة ويمثل الجزء الآخر من الخط الواقع على يسار نقطة الأصل فئة الأعداد الحقيقية السالبة . ويسمى هذا الخط الأفقى « **محور السينات** » $(X - \text{axis})$ والخط المســتقيم الراسى يسمى محور الصادات $(Y - \text{axis})$ والجزء الذى يقع أعلى نقطة الأصل يمثل فئة الأعداد الحقيقية الموجبة اما الجزء السفلى منه فيمثل فئة الأعــداد الحقيقية السالبة . يسمى المستوى الذى يحتوى هذين المحورين مستوى XY

فاذا كانت النقطة (x, y) تقع فى المستوى $X Y$ ، فان « x » يســـمى الاحداثى السينى للنقطة وهو البعد بين النقطة ومحور Y ، أما « y » ، تسمى الاحداثى الصادى للنقطة وهى البعد بين النقطة ومحور X .



ويلاحظ من الشكل السابق أنه يمكن تقسيم المستوى الى اربع مناطق :

المربع الأول : ويمثل جميع النقط التى احداثياتها السينية والصادية موجبة .

المربع الثانى : ويمثل جميع النقط التى احداثيها السينى سالب واحداثيها الصادى موجبة .

المربع الثالث : ويمثل جميع العناصر التى احداثياتها السينية سالبة وكذلك احداثياتها الصادية .

المربع الرابع : ويمثل جميع النقط التى احداثياتها السينية موجبة ولكن احداثياتها الصادية سالبة .

اطلق على هذا النوع من المحاور اسم « المحاور الكرتيزية المتعامدة » نسبة الى العالم الرياضى « رينيه ديكارت » (١٥٩٦– ١٦٥٠) الذى أسس وأنشأ الهندسة التحليلية .

مثال (١) :

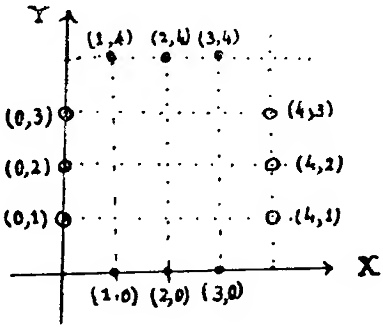
ارسم عناصر كل من فئة الأعداد الزوجية الترتيب $B \times A$, $A \times B$ حيث :

$$A = \{1, 2, 3\} \quad , \quad B = \{0, 4\}$$

الحـل :

$$A \times B = \{(1,0), (1,4), (2,0), (2,4), (3,0), (3,4)\}$$

$$B \times A = \{(0,1), (0,2), (0,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$



والشكل المقابل يبين عناصر هاتين الفئتين على الاحداثيات الكرتيزية المتعامدة .

بند ١ ــ ٦ ــ الفترات العددية :

عرفنا فى بند ١ ــ ٤ معنى (خط الأعداد الحقيقية) وفى مبحثنا هذا نورد دراسة جزء معين من هذا الخط . وعلى وجه التحديد لو أردنا دراسة جزء المستقيم السابق الذكر المحصور بين العددين 2 — ,4 ، يكون لدينا فى هذه الحالة احتمالات متعددة .

أولا ــ أما أن يتضمن موضوع الدراسة كل من طرفى الجزء المراد دراسته وهما :

2 — ,4 وكذلك مابينهما .

ثانيا ــ وأما أن يتضمن موضوع الدراسة طرف واحد فقط وفى هذه الحالة ينتج لدينا :

١ ــ أن يتضمن موضوع الدراسة الطرف الأيمن فقط الذى يمثل العدد 2—

٢ ــ أن تتضمن الدراسة الطرف الأيسر فقط الذى يمثل العدد 4

ثالثا ــ أو أن يكون موضوع الدراسة لايتضمن اى من الطرفين على الاطلاق

كل حالة من الحـــالات السابقة تمثل فيها نقاط ذلك الجزء من المستقيم المراد دراسته فئة جزئية لفئة الأعداد الحقيقية . وتسمى هذه الفئات بمسمى هو الفترات العددية Intervals .

وعموما اذا افترضـــــنا العددين a , b حيث a < b فيكون لدينا التعريفات التالية :

١ ـ ٦ ـ ١ تعريف : الفترة العددية المقفلة Closed Interval :

الفترة العددية المقفلة من a الى b هى الفئة التى تشمل جزء الأعداد الحقيقية المحصـــورة بين b, a وكذلك العددين b, a ويرمز لهـــا بالرمز [a, b] وتعرف كالتالى :

$$[a, b] = \{ x : \in R , a \leq x \leq b \}$$

ويمكن تمثيلها كما فى الشكل ١ ـ ٦ ـ ١



شكل ١ ـ ٦ ـ ١ الفترة العددية المقفلة

١ ـ ٦ ـ ٢ تعريف الفترة العددية نصف المفتوحة من اليمين
Half-Open Interval

هذه الفترة هى الفئة التى تشمل جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين a , b وكذلك العدد « a » ويرمز لها بالرمز [a , b) وتعرف كالتالى :

$$[a, b) = \{ x : x \in R, a \leqslant x < b \}$$

ويمكن تمثيلها كما فى الشكل ١ ـ ٦ ـ ٢



شكل ١ ـ ٦ ـ ٢ الفترة العددية نصف المفتوحة

١ ـ ٦ ـ ٣ ـ تعريف : الفترة العددية نصف المفتوحة من اليسار :

الفترة العددية نصف المفتوحة من اليسار من a الى b هى الفئة التى تشمل جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين a و b وكذلك العدد b ويرمز لها بالرمز $(a, b]$ وتعرف كالتالى :

$$(a, b] = \{ x : x \in R , a < x \leqslant b \}$$

والشكل المقابل يمثل مثل هذه الفترة كما هو واضح من الشكل ١ ـ ٦ ـ ٣



شكل ١ ـ ٦ ـ ٣ الفترة العددية « نصف المفتوحة »

١ ـ ٦ ـ ٣ تعريف : الفترة العددية المفتوحة Open Interval :

تعرف هذه الفترة من « a » الى « b » بأنها الفئة التىتشمل جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين « a » , « b » ولا تشمل أى من الطرفين ويرمز لها بالرمز (a, b) وتعرف كالتالى :

$$(a, b) = \{ x : \in R , a < x < b \}$$

ويمثل الشـــكل المقابل تمثيلا لهذه الفترة المفتوحة بين (a, b) .



شكل ١ ـ ٦ ـ ٤ الفترة العددية المفتوحة

هناك فترات عددية اخرى سندرجها ضمن الجدول التالى :

جدول الفترات العددية

(1)	$[a, b]$	=	$\{ x : x \in R;\ a \leq x \leqslant b \}$
(2)	$(a, b]$	=	$\{ x : x \in R;\ a < x \leqslant b \}$
(3)	$[a, b)$	=	$\{ x : x \in R;\ a \leqslant x < b \}$
(4)	(a, b)	=	$\{ x : x \in R;\ a < x < b \}$
(5)	(a, ∞)	=	$\{ x : x \in R;\ a < x < \infty \}$
(6)	$[a, \infty)$	=	$\{ x : x \in R;\ a \leqslant x < \infty \}$
(7)	$(-\infty, a)$	=	$\{ x : x \in R;\ -\infty < x < a \}$
(8)	$(-\infty, a]$	=	$\{ x : x \in R;\ -\infty < x \leqslant a \}$

وفى كل من الفترات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) المدونة فى هذا الجدول يكون طول كل من هذه الفترات العددية محدودا وهو عبارة عن الفرق بين b , a أى ان $d = b - a$

وهذا يجرنا الى الحديث عن القيمة العددية او المطلقة لعدد ما وهذا ماسنتعرض له بالبحث فى البند التالى :

بند ١ ــ ٧ ــ القيمة العددية (المطلقة) Absolute Value :

اذا كانت x_1 , x_2 نقطتين على خط مستقيم الأعــداد الحقيقية بحيث تقع x_1 على يسـار x_2 فانه يقال ان العدد x_1 اقل من العدد x_2 اى $(x_1 < x_2)$ والمسافة بين x_1 , x_2 فى هذه الحالة هى $d = x_2 - x_1$ وهى عبارة عن مقدار موجب .

أما اذا كانت x_1 تقع على يمين x_2 فانه يقال أن x_1 اكبر من x_2 (أى $x_1 > x_2$) وتكون المسافة بين x_1 , x_2 فى هــــذه الحالة هى $d = x_1 - x_2$ وهى كذلك عبارة عن مقدار موجب .

لذا فالمسافة بين اى نقطتين ممثلتين للعددين x_1 , x_2 هى القيمة الموجبة للفرق بين العددين x_1 , x_2 بغض النظر عن أيهما أكبر ، وتسمى القيمة المطلقة للفرق بين العددين x_1 , x_2 .

فالقيمة العددية لعدد ما وليكن x مثلا يعبر عنها بالرمز $|x|$ وهى عبارة عن القيمة العددية لذلك العدد بغض النظر عن اشارته .
فمثلا :

$$|5| = 5 , |-5| = - (-5) = 5$$

١ ـ ٧ ـ ١ تعريف : القيمة العددية (المطلقة) Absolute value :

القيمة العددية لعدد حقيقى تعرف كالآتى :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if} \quad x > o \\ -x & \text{if} \quad x < o \\ o & \text{if} \quad x = o \end{cases}$$

لذا يمكن التعبير عن $|x|$ بما يلى $|x| = \sqrt{x^2}$

ولذلك فان $\sqrt{x^2}$ عبارة عن كمية موجبة دائما .

مثال (١) :

(i) $\sqrt{5^2} = 5 \quad , \quad \sqrt{(-5)^2} = 5$

(ii) $$\begin{aligned} |x - 1| &= x - 1 && \text{if } x > 1 \\ &= 1 - x && \text{if } x < 1 \\ &= o && \text{if } x = 1 \end{aligned}$$

١ ـ ٧ ـ ٢ نظريات القيمة العددية (المطلقة) :

نظرية (١) :

اذا كان a , bعددين حقيقيين فان القيمة المطلقة لحاصل الضرب (أو القسمة) يساوى حاصل ضرب (أو قسمة) القيمة المطلقة لكل منهما أى أن :

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| , \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} , b \neq 0.$$

نظرية (٢) :

لأى عددين حقيقيين b , a تكون القيمة المطلقة لحاصل جمعهما اقل أو يساوى حاصل جمع القيمة المطلقة لكل منهما اى أن :

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

نظرية (٣) :

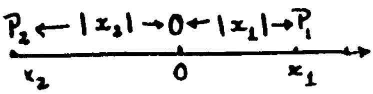
لأى عددين حقيقيين b , a تكون القيمة المطلقة للفرق بينهما اكبر او يساوى القيمة المطلقة للأول ناقصا القيمة المطلقة للثانى اى أن :

$$|a - b| \geqslant \big|\, |a| - |b| \,\big|$$

يطلق على النظريتين السالفتين (٢ ، ٣) قواعد المثلث لتشابههما مع بعض قواعد المثلثات المستوية .

الحاقا لما سبق ذكره عن القيمة المطلقة يكون التفسير الهندسى لـ "$|x|$" هو عبارة عن المسافة بين نقطة الأصل (O) والنقطة (P) التى تمثل العدد الحقيقى x بغض النظر عما اذا كانت قيمة x موجبة أو سالبة .

ففى هذا الشكل نلاحظ أن قيمة x_1 موجبة ولذلك تكون النقطة P_1 التى تمثل العـدد تقع على يمين نقطة الأصـــل (O) وتكون المسـافة (OP_1) تساوى $|x_1|$ وكما نلاحظ أيضـا أن x_2 سالبة ، ولذلك فان النقطة P_2 التى تمثل ذلك العـدد تقع على يسار نقطة الأصل (O) وتكون المسافة (OP_2) تساوى $|x_2|$



شكل ١ — ٧ — ١ التمثيل الهندسى للقيمة المطلقة

ونود عند هذه النقطة أن ندمج موضوع القيمة المطلقة بموضـــوع الفترات العددية سالفة الذكر (بند ١ — ٦) . فاذا أردنا القول أن العدد « x » يقع بين العددين — ١ و ١ ولا يساوى أى منهما ، فهذا يعنى أن « x » تبعد مسافة قدرها اقل من وحدة قياســـية واحدة عن نقطة الأصل . نستطيع أن نعبر عن هذا بالأستعانة بمفهوم القيمة المطلقة كالتالى :

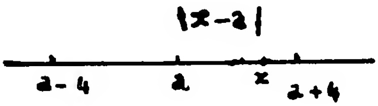
$$|x| < 1$$

يعادل هذا التعبير تمـــاما المتباينتين $(-1 < x < 1)$ اى أن « x » تقع فى الفترة العددية المفتوحة $(-1, 1)$.

اما اذا أردنا القول أن العـــدد الحقيقى « x » يقع فى مدى أربع وحدات قياســـية من عـــدد آخر « a » ، فاننا نكتب $|x-a| < 4$ وهذا يعنى تماما حسب المفهوم الهندسى للقيمـــة المطلقة أن المسافة بين a , x أقل من اربع وحدات قياســـية ، وكما انه يعنى أيضـــا $-4 < x - a < 4$ وباضافة العدد « a » لكل حد من حـــدود هاتين المتباينتين نجد أن

$$a - 4 < x < a + 4$$

أى أن x تقع فى الفترة العـــددية المفتوحة $(a - 4 , a + 4)$



شكل ١ – ٧ – ٢

كما هو موضح فى الشكل ١ – ٧ – ٢ وعندما تكون قيمة المقدار $x - a$ صغيرة – حيث « a » مقدار ثابت – فان هذا التعبير يعنى أن قيمة « x » قريبة من المقدار الثابت « a »

اما اذا كانت « x » لاتساوى قيمة « a » فنستطيع أن نعبر عن هذا القول بأن $|x - a| > 0$ ومن هذا المفهوم يتطور الحديث عند دراسة باب النهايات وبعض فروع الرياضيات المتقدمة مثل علم التوبولوجى الى ماهو معروف بـ « الجوار Neighbourhood » حيث هو التعبير عن فئة الأعداد القريبة من عدد معين ثابت القيمة (a مثلا) .

١ – ٧ – ٣ تعريف الجوار Neighbourhood :

يعرف جوار العدد « a » بنصف قطر r على انه الفئة التى يرمز لها بالرمز $N_r(a)$ كما يلى :

$$N_r(a) = \{ x : |x - a| < r \}$$

فى بعض الأحيان نحتاج الى أن يكون الجوار محذوف المركز اى مامعناه أن مركز الجوار ليس عنصرا من عناصر الجوار . ويطلق على هذه الحالة « الجوار الثقوب » .

١ ـ ٧ ـ ٤ تعريف الجوار المثقوب : Deleted Neigh-bourhood

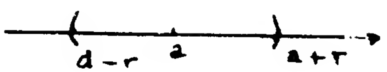
يعرف الجوار المثقوب للعدد الحقيقى « a » بنصف قطر « r »
على انه الفئة التى يرمز لها بالرمز $N_r'(a)$ حيث :

$$N_r'(a) = \{ x : 0 < |x - a| < r \}$$

مثال (٢) :

١ ـ فى بحث مستقيم الأعداد الحقيقية يكون جوار العدد « a » بنصف قطر « r » هو الفترة العددية المفتوحة $(a - r , a + r)$ حيث « r » عدد حقيقى موجب . وطريقة استنتاج هذه النتيجة هو التسلسل المنطقى التالى :

$$N_r(a) = \{ x : |x - a| < r \}$$
$$= \{ x : -r < x - a < r \}$$
$$= \{ x : -r + a < x < r + a \}$$
$$= (a - r , a + r)$$



٢ ـ جوار العدد الحقيقى c بنصف قطر $r = 3$ هو الفترة العددية المفتوحة

$$N_3(c) = (c - 3 , c + 3)$$

٣ ـ جوار العدد الصحيح السالب -3 بنصف قطر $r = 2$ هو الفترة العددية المفتوحة

$$N_2(-3) = (-5, -1)$$

٤ ـ جوار العدد الصحيح الموجب اربعة ؛ بنصف قطر r هو الفترة العددية المفتوحة

$$N_r(4) = (4 - r, 4 + r)$$

٥ ـ تعتبر أى فترة عـددية مفتوحة ولتكن $(a - r , a + h)$ حيث $a \in R$ و $h , r \in R^+$ جوار العـدد « a » اذا كانت « a » بالذات عنصرا من عناصر تلك الفترة العددية أى أن :

$$N_{r,h}(a) = (a - r , a + h)$$

اذا كانت :

$$a \in (a - r , a + h)$$

ملاحظـات :

اولا ـ كمثال على جوار مثقوب نرى أنه عند دراسة خصائص المقدار $\frac{x^3 + 27}{x + 3}$ لقيم مختلفة لـ x قريبة من العدد -3 يجب أن تكونهذهالقيم عناصر من عناصر الجوار المثقوب للعدد (-3) حيث أنه اذا أخذت x القيمة -3 ينتج لدينا أن :

$$\frac{x^3 + 27}{x + 7} = \frac{(-3)^3 + 27}{(-3) + 3} = \frac{0}{0}$$

وهذه القيمة ليست لها أى معنى وتعتبر قيمة غير معينة .

ولكن اذا قيدت قيمة « x » بحيث تكون عنصرا من عناصر الجوار المثقوب للعـــــــدد (-3) يتوجب بذلك أن يكون $x + 3 \neq 0$ وتصبح عندئذ قيمة المقدار بالضبط هى

$$\frac{x^3 + 27}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x^2 - 3x + 9)}{x + 3} = x^2 - 3x + 9$$

لجميع قيم $x + 3 \neq 0$

ونجد عندئذ أن قيمة هذا المقدار تقترب من العدد ٢٧ كلما اقتربت قيمة « x » من العدد -3. ويبين الجدول التالى هذا بوضوح تام

x	—2.9	—2.99	—2.999	—3.001	—3.1
$x^2 - 3x + 9$	26.11	26.9101	26.991001	27.009002	27.91

وهذه هى الفكرة الرئيسية التى ستستخدم فى بحث النهايات فى الأبواب القادمة .

ثانيا ـ تقاطع جوارات لعـدد ما هو عبـارة عن الفترة العـددية المشتركة بين كل من هذه الجوارات ، وهذه الفترات العددية تكون هى الأخرى جوارا لذلك العدد .

اى أنه اذا كان كل من

$$(a - r_1 , a + h_1) , (a - r_2 , a + h_2)$$

جوارين للعدد « a » فانتقاطعهما $(a - r , a + h)$ عبارة عنجوار العدد « a » أيضا ونستطيع القول كذلك أن تقاطع جوارات مثقوبة لعدد ما هو الآخر يعتبر جوارا لذلك العدد :

مثال (٣) :

اذا كان لدينا الجواران $N = (3,9) , M = (2,7)$

فاذا كانت « x » عنصرا من عناصر « N , M » فانهـا يجب أن تحقق كل من المتباينتين

$$2 < x < 7 , \qquad 3 < x < 9$$

وهاتان المتباينتان تتحققـــان متى كانت $3 < x < 7$. والعكس صحيح أى اذا كان $3 < x < 7$ فان المتباينتين السابقتين تتحققـــان . ولهذا يكون

$$N \cap M = (3,7)$$

أما اذاكانت $x = 4$ وحذفت هـــذه القيمـة من كل من N , M سنحصل عندئذ على الجوارين المثقوبين التاليين للعدد أربعة .

$$M'(4) = (2,4) \cup (4,7),$$
$$N'(4) = (3,4) \cup (4,9)$$

ويكون تقاطعهما هو الجوار :

$$M' \cap N' = (3,4) \cup (4,7)$$

تمـــارين

١ ــ استخدم كل من طريقة الجرد Roster Method والطريقة الوصفية Rule معا كلما امكن للتعبير عن الفئات التالية :

(أ) فئة الخلفاء الراشدين رضى الله عنهم .

(ب) فئة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من صفر .

(جـ) فئة الكسور التى بسطها يساوى واحـــد ومقـامه اى من الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من ١٥ .

(د) فئة الكسور العشرية المكونة من رقم عشرى واحد .

(هـ) فئة عواصم الدول العربية .

٢ ــ استخدام الطريقة الوصفية Rule Method للتعبير عن الفئات التالية :

(i) $A = \{ 2, 4, 6 \}$ (ii) $B = \{ 1, 4, 9, 16, 25 \}$

(iii) $C = \{ 1, 1/2, 1/3, 1/4 \}$

(iv) $D = \{ 10,100,1000,10000 \}$

(v) $F = \{ 5 , 1.5, 0.45, 0.135, ... \}$

٣ ــ أى من العبارات التالية تعتبر صحيحة واذكر السبب فى كل حالة

1) $10 \in \{ 9 + 2, 13 - 3, 7 (4) \}$

2) $\frac{1}{4} \notin \{ 0.25 , 0.5 , 0.75 \}$

3) $\{ 3, 6 \} \in \{ x : x = 3 n , n = \{ 3, 6 \} \}$

4) $\{ 0 \} \in \{ -7, 0, 7 \}$.

5) $87 \in \{ 9, 8, 7, 6 \}$

6) $\{ a \} \in a$

7) $a \in \{ a \}$

٤ــ أى من هذه الفئات تعتبر فئات محددة Finite وأى منهــا يعتبر فئة لا نهائية ؟

(أ) فئة الخطوط المستقيمة ذات الطول أربعة سنتيمترات .

(ب) فئة المثلثات التى مساحتها تساوى واحد سم٢ .

(جـ) فئة الكلمات الموجودة فى المصحف الشريف .

(د) فئة السادة الوزراء فى حكومة هذا القطر .

(هـ) فئة طلبة الثانوية العامة للعام الدراسى الماضى فى مدارس هذا القطر .

(و) فئة النقط (x, y) الواقعة فى المستوى الاقليدى المتعامد .

٥ ــ حدد اى من العبارات التالية صحيحة وايها خطا

1) $7 \in \{1, 3, 5, 7\}$ 2) $\phi \subset \{\phi\}$

3) $\{1, 9\} \in \{x : x = y^2, y \in I\}$

4) $\{x : x = 2n + 2, n \in I\} \subset \{2, 4, 6\}$

5) $a \in \phi$ 6) $\{\phi\} \in \phi$

7) $\phi \in \{\phi\}$ 8) $\phi \in \phi$

9) $U \in \{U\}$ 10) $U \in \phi$

11) $\phi \in U$. 12) $U \subset U$

٦ ــ كون الفئة الشاملة فى كل حالة من الحالات الآتية :

1) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 3\}$, $C = \{4, 5\}$

1) $X = \{a\}$ $Y = \{b, c\}$

3) $V = \{x : x \in I^+, 0 < x < 20\}$,
$W = \{y : \in I^-, -20 < y < 0\}$.

٧ ــ اذا كانت :

$A = \{1, 2; 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$,
$C = \{2, 4, 5\}$

فأى من العبارات التالية تعتبر صحيحة ؟

1) $A \subset B$	2) $B \subset C$	3) $C \subset C$
4) $A \subset C$	5) $C \subset A$	6) $\phi \subset B$
7) $B \subset A$	8) $C \subset B$	9) $B = C$
10) $\phi \subset B$	11) $A = C$	12) $A = B$

٨ ــ أوجد الفئات الجزئية الممكنة لكل من الفئات التالية :

1) $A = \{ a, b \}$ 2) $A = \{ a, b, c \}$

3) $A = \{ a, b, c, d \}$ 4) $A = \{ 0, 7, 4 \}$

5) $A = \phi$ 6) $A = \{ 0, 1 \}$

٩ ــ اذا كانت .

$$a \in X , \quad b \in Y , \quad X \subset Z , \quad Y \subset Z$$

اجب عن الأسئلة الآتية :

(أ) هل $a \in Z$ ؟ (ب) هل $b \in Z$ ؟ (جـ) هل $a \in Y$ ؟

(د) هل يمكن أن يكون هناك عنصر ينتمى الى « Z » وينتمى فى نفس الوقت لكل من X , Y ؟

(هـ) هل يمكن ان يكون هناك عنصر ينتمى الى « Z » ولا ينتمى الى كل من X , Y ؟

١ ــ اكمل العبارات الموجودة فيما يلى :

1) $\{ 4 + 2 , 5 + 0 \}$ ...... ? .... $\{ 4 + 1 , 8 - 2 \}$

2) $\{ 1 \times 7 \} \in \{$ ..... ? .. $, 3, 5 \}$

3) $\{ 1, 3, 5 \}$ ... ? .. $\{ x : x = 2n + 1 , n \in I \}$

4) $\dfrac{8\,x \; \ldots}{4} \in \{ 8 \}$

١١ ــ اذا كانت :

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$C = \{4, 5, 6, 7\}$, $D = \{6, 7, 8, 9\}$

أوجد كل من الفئات التالية :

1) $A \cup B$
2) $D \cup B$
3) $B \cup C$
4) $A \cap \phi$
5) $(B \cap D)$
6) $B \cap C$
7) C'
8) $C \cup U$
9) $(U \cup \phi)'$
10) $D \cap A$
11) $B \cap \phi$
12) $(A \cup B)'$
13) $B \cap D$
14) B'
15) $C \cap D$
16) $A - C$
17) $A - B$
18) $(A - C) \cup D$
19) $(A - C)' - A$
20) $(A - B) - C$
21) $(A - C) - (B - C)$
22) $D - (C - A)$
23) $D - (A - D) - (B \cap A)$
24) $(A \cap B) \cap (C \cap D)$

١٢ ــ باستخدام أشكال ڤن اثبت ان :

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) $(A \cup B)' = A' \cup B'$
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

١٣ ــ اذكر الشرط (الشروط) اللازم وضعه (أو وضعها) لكل من الفئتين اذا لزم الامر لكى يكون لدينا الآتى :

1) $A \cap B = \phi$
2) $A \cup B = \phi$

3) $A \cap \phi = \phi$	4) $A' \cap B' = \phi$
5) $A \cap U = A$	6) $A \cup B = B$
7) $A \quad B = A$	7) $A \cup B = U$

١٤ ــ اذا كانت :

$X = \{6, 8, 10, 12\}$, $Y = \{5, 7, 9\}$

أوجد كل من الآتى :

1) $X \times X$	2) $X \times Y$
3) $Y \times X$	4) $Y \times Y$

١٥ ــ اذا كانت :

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 5, 6, 7\}$

أوجد كل مما يلى :

1) $X - Y$	2) $Y - X$	3) $X - \phi$
4) $\phi - X$	5) $X - U$	6) $X - X'$
7) $Y' - Y$	8) $X' - Y'$	9) $X \cap Y'$

اذكر ملاحظاتك عن الفقرتين 9 ,8 ؟

١٦ ــ عبر بوضوح (كلاميا) عن كل من العبارات الرياضية التالية :

1) $a < 2$	2) $a < b$
3) $a < b < c$	4) $a > b$
5) $a - b = 1$	6) $3.14 < \pi < 3.15$
7) $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$	8) $-1 < x < 1$
9) $\lvert 5 - 2 \rvert > \lvert 1 - 3 \rvert$	10) $a - b > 0$
11) $\lvert x - 7 \rvert < 2$	12) $\lvert x - 1 \rvert > 4$

١٧ ـ أوجد حل كل من المعادلات الآتية :

1) $|x| = 10$
2) $x = |10|$
3) $x = \sqrt{3^2}$
4) $x = |12 - 5|$
5) $x = \sqrt{(0.4)^2}$
6) $x = |-\frac{1}{2}|$
7) $x = \sqrt{(-1)^2}$
8) $x = |\frac{1}{4} - \frac{1}{2}|$
9) $|x| = |\frac{1}{2}| - |\frac{1}{4}|$

١٨ ـ أوجد حل كل من المتباينات التالية لجميع قيم (x) المحتملة

1) $|3 - x| \leqslant 5$
2) $|3 - x| \geqslant 5$
3) $|2x + 6| < 4$
4) $|2x + 5| \geqslant 5$
5) $|3x + 7| \leqslant 8$
6) $|4 + 3x| > 2$

١٩ ـ مثل بيانيا النقاط التالية :

(أ) النقطة التى احداثيها السينىأربعة ، والصادى ثلاثة .

(ب) $(4, -3)$

(جـ) عندما تكون $x = -4$, $y = 3$

(د) $(2, 6)$, $(-1, 4)$, $(3, -2)$, $(-1, -3)$

(هـ) $(1, -1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$

٢٠ ـ (أ) ماهى قيمة الاحداثى السينى للنقطة الواقعة على المحور الصادى ؟

(ب) ماهى قيمة الاحداثى الصادى للنقطة الواقعة على المحور السينى ؟

٢١ ـ أوجد الجوارات التالية :

1) $N_2\ (-2)$
2) $N_1\ (0)$
3) $N_3\ (-2)$
4) $N_2\ (2)$
5) $N_1\ (3)$
6) $N_1\ (0)$
7) $N_{2,4}\ (5)$
8) $N_{3,6}\ (-1)$
9) $N_{1,6}\ (10)$
10) $N_{2,4}\ (5)$
11) $N_{3,6}\ (-1)$
12) $N_{1,6}\ (5)$

الباب الثاني

العلاقات والدوال وتمثيلها بيانيا

RELATIONS AND FUNCTIONS AND GRAPHS

بند ٢ ـ ١ العلاقات Relations :

٢ ـ ١ ـ ١ تعريف العلاقة Relation :

تسمى الفئة « Ψ » علاقة على الفئة « A » اذا كانت « Ψ » عبارة عن فئة جزئية من الفئة $A \times A$

مثال (١) :

كون بعض العلاقات الممكن تكوينها على الفئة « A » اذا كانت $A \in R$ حيث

$$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$

الحل :

يلزم أولا ان تحسب $A \times A$

$$A \times A = \{ (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1) \\ (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3) \\ (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$$

وبذلك تكون الفئات التالية هى بعض الفئات الجزئية للفئة زوجية الترتيب $A \times A$ السابقة

1) $\Psi_1 = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$

2) $\Psi_2 = \{ (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3) \}$

4) $\Psi_3 = \{ (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3) \}$

4) $\Psi_4 = \{ (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$

$$5)\ \Psi_5 = \{ (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3) \}$$

$$6)\ \Psi_6 = \{ (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1) \}$$

$$7)\ \Psi_7 = \{ (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2) \}$$

$$8)\ \Psi_8 = \{ (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3) \}$$

$$9)\ \Psi_9 = \{ (0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0) \}$$

$$10)\ \Psi_{10} = \{ (0, 0), (0, 1)\ (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \}$$

ففى حالة المستوى الاقليدى« XY » تكون الفئة « A » فى هـذه الحالة هى فئة الأعداد الحقيقية « R » ومنها تكون العلاقة هى اى فئة زوجية الترتيب بحيث تكون فئة جزئية من $R \times R$

٢ ـ ١ ـ ٢ ملاحظـة :

من الجائز ان يأخذ الحد الأول من العناصر زوجية الترتيب المنتمية الى العلاقة قيمة واحدة فقط بينما يأخذ الحد الثانى لهذه العناصر اكثر من قيمة واحدة ـ راجع المثال السابق ـ أى ان من المحتمل أن توجـد عناصر فى الصورة

$$(a, b_1)\ ,\ (a, b_2)\ ,\ (a, b_3)\ ,\ \dots\ (a, b_n)$$

وتعتبر هذه الملاحظة ذات أهمية كبرى عند دراسة الدوال (بند ٢ـ٣) وبامكاننا دراسة موضوع العلاقات بتعمق أكثر الا أن هذه الدراسة لاتعتبر من صلب موضوع حساب التفاضل والتكامل . وسنكتفي بهذا القدر بصدد هذا الموضوع ، وبامكان القارىء التعمق فى دراستها عند تعرضـه لمادة الجبر او اى فرع من فروع الرياضيات التى تحتاج فى دراسـتها الى التعمق فى هذا المبحث

بند ٢ ـ ٢ ـ الثوابت والمتغيرات Constants and Variables :

يدخل فى اية عملية رياضية نوعان من الكميات . الأولى منهـا هى الكميات الثابتة Constants وهى التى تأخذ قيمة واحدة فقط ولا تتغير هذه القيمة عند اجراء العمليات الرياضية .

اما النوع الثانى فهى الكميات المتغيرة Variables هى التى يمكن اعطاؤها عدد غير محدود من القيم . فمثلا فى المعادلة .

$$w = 2x - 5y + 3z$$

فان الكميات الثابتة هى 3 ,5 — ,2 ,1 ، بينما الكميات المتغيرة هى x, y, z, w

وكذلك فى المعادلة :

$$F = k \frac{M_1 \times M_2}{r^2}$$

حيث M_1 , M_2 تمثلان كتلتى جسيمين مختلفين ، « r » هو البعد بينهما ، « F » ترمز الى القوة المؤثرة بين هذين الجسيمين . فاننا نجد أن :

الكميات الثابتة هى « k » ويعرف بثابت الجاذبية العام

والكميات المتغيرة هى :

$$F, M_1, M_2, r.$$

وهذه المعادلة تعبر عن قانون الجاذبية العام بين جسمين كتلتيهما M_1 , M_2 موضوعين على بعد « r » من بعضهما . وينسب هذا القانون الى العالم اسحق نيوتن (١٦٤٢ — ١٧٢٧) .

وسيكون لدينا الكثير من الأمثلة على هذين النوعين من الكميات عند دراسة البند التالى :

بند ٢ — ٣ — الدوال Functions :

٢ — ٣ — ١ — تعريف : الدالة Function :

الدالة « f » عبارة عن علاقة بحيث أن لكل قيمة يأخذها المتغير « x » توجد قيمة واحدة فقط للمتغير « y » ويرمز لها بالرمز

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$f = \{ (x, y) : x, y \in R, y = f(x) \}$$

ومن هذا التعريف نلاحظ أنه اذا كانت (x, y_1) , (x, y_2)

عنصرين من عنـــاصر الدالة « f » فانه يجب ان يكون $y_1 = y_2$ ولذا اذا تحقق هذا الشرط فى اى علاقة صارت هذه العلاقة دالة . ومن ثم نستطيع ان نقول ان كل دالة تعتبر علاقة بينما العكس غير صـحيح (لماذا ؟) .

٢ ـ ٣ ـ ٢ تعريف حيز (او نطاق) الدالة Domain of a function :

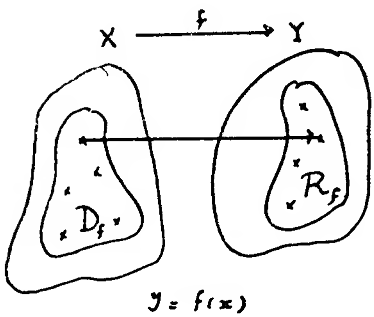
اذا كانت $f : X \longrightarrow Y$ دالة فان حيـز (أو نطـاق) Domain هذه الدالة « f » هو الفئة التى يرمز لها بالرمز « D_f » وتتكون من القيم التى يمكن ان تأخذها « x » أى أن :

$$D_f = \{ x : x \in X, f : x \longrightarrow y \}.$$

٢ ـ ٣ ـ ٣ : تعريف : مدى الدالة Range of a function :

اذا كانت $f : X \longrightarrow Y$ دالة فان مدى Range هـذه الدالة هو الفئة التى يرمز لها الرمز « R_f » وتتكون من جميع القيم التى تأخذها « y » أى أن :

$$R_f = \{ y : y \in Y ; f : X \longrightarrow Y \}$$



شكل ٢ ـ ٣ ـ ١ حيز ومدى الدالة f (x)

مثال (١) :

أوجـد حيز ومدى الدالة التى معـــادلتها $y = \sqrt{1 - x^2}$ علما بأن $y \in R$.

الحـل :

لكى تكون « y » عددا حقيقيا (اى ان $\sqrt{1 - x^2}$ حقيقى) يجب أن يكون $x^2 \leqslant 1$ أى ان

$$-1 \leqslant x \leq 1 \quad \therefore \quad |x| \leqslant 1$$

$$D_f = [-1, 1] \quad \therefore \quad x \in [-1, 1] \quad \therefore$$

اى ان حيز الدالة هو الفترة المقفلة [1– , 1] ونتيجة لتعويض قيم « D_f » فى معادلة الدالة نجد ان

$$0 \leqslant y \leqslant 1$$

$\therefore \quad y \in [0, 1] \qquad \therefore \qquad R_f = [0, 1]$

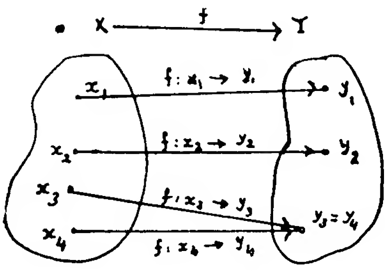
وهذا يعنى ان مدى الدالة هو الفترة المقفلة $[0, 1]$

ويمكننا تلخيص المتطلبات الأساسية لتعريف اية دالة فيما يلى :

١ ـ الحيز « X » : او الفئة التى عناصرها عبارة عن قيم $x \in X$

٢ ـ المدى « Y » : او الفئة التى عناصرها عبارة عن قيم $y \in Y$

٣ ـ قاعدة أو علاقة اوطريقة لربط هاتين الفئتين بطريقة خاصة بحيث يكون لكل قيمة من قيم « x » هناك قيمة **واحدة فقط** من قيم « y » .



شكل ٢ ـ ٣ ـ ٢

مثال (٢) :

اعتبر الدالة المعرفة بواسطة المعادلة $y = f(x) = 2x - 6$

حيث « x » عبارة عن عناصر فئة الأعداد الصحيحة الموجبة والتى قيمتها أقل من العدد عشرة

اى ان :

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$$

وبهذا يكون :

$$f(1) = 2(1) - 6 = 2 - 6 = -4$$

$$f(2) = 2(2) - 6 = 4 - 6 = -2$$

$$f(3) = 2(3) - 6 = 6 - 6 = 0$$

$$f(4) = 2(4) - 6 = 8 - 6 = 2$$

....

....

....

....

$$f(9) = 2(9) - 6 = 18 - 6 = 12$$

ويلاحظ هنا أن حيز ونطاق هذه الدالة هو :

$$D_f = \{ x ; x \in I, 0 < x < 10 \}$$

$$R_f = \{ y : y I, -4 \leqslant y \leq 12 \}$$

مثال (٣) :

تعرف مســـاحة الدائرة « A » التى نصف قطـرها « r » حسب المعادلة $A = \pi r^2$ باستطاعتنا هنا ان نعتبر $A (r) = \pi r^2$ كمعادلة لتعريف الدالة التى تربط قيم نصف القطر ومســاحة الدائرة المناظرة لتلك القيم . اذ يمكن كتابة هذه الدالة فى الصورة

$$A : r \longrightarrow \pi r^2 \qquad (r \geqslant 0)$$

ولذا فمساحة الدائرة التى نصف قطرها يساوى صفر هى :

$$A (0) = 0$$

بينما مساحة الدائرة التى نصف قطرها يساوى واحد هى :

$$A (1) = \pi$$

وهكذا .. ومن هنا نلاحظ ان حيز ومدى هذه الدالة عبارة عن فئة الأعداد الحقيقية الموجبة والصفر أيضا .

مثال (٤) :

سنسوق هنا مثالا سهلا ولكن فى غاية الأهمية وهو الدالة « f » التى تربط الأعداد الحقيقية بعدد ذى قيمة واحدة فقط وتسمى هــذه الدالة « الدالة الثابتة Constant function » ويعبر عنها كالتالى :

$$y = f (x) = C. \quad \text{OR} \quad f : X \longrightarrow C$$

ونتيجة لذلك يكون لدينا

$$f (0) = C, \; f (1) = C, \; f (2) = C, \ldots\ldots$$

وعموما $f (x) = C$ لجميع قيم $x \in R$.

وبهذا يكون حيز هذه الدالة هو عبارة عن فئة الأعداد الحقيقية . بينما المدى فى هذه الحالة هو الفئة التى تحتوى على عنصر واحد فقط اى ان :

$$D_f = R \text{ (Real Number)}$$

$$R_f = \{ C \} .$$

بند ٢ ــ ٤ : التمثيل البيانى للعلاقات والدوال :
Graph Representation of Relations and Functions :

نستطيع باستخدام نظام الاحداثيات الكرتيزية المتعامدة (بند ١ــ٥) ان نوجد الترابط بين الفئتين «Y» , «X» (او أى فئتين اخريتين) فى دالة معينة بيانيا . وعلى الرغم من اننا لانستطيع تمثيل جميع النقاط (x, y) التى تحقق احداثياتها معادلة الدالة $y = f(x)$ الا أن بمقدرتنا تمثيل بعض تلك النقاط بحيث تعطى تقريبا جيدا وصورة تقريبية لتلك الدالة المعينة . ولبيان هذه الصورة تعطى قيما اختيارية للمتغير « x » الذى نطلق عليه المتغير المستقل Independent Variable

بحيث تكون هذه القيم واقعة فى حيز الدالة $(x \in D_f)$ ولكل قيمة من هذه القيم المختارة توجد قيمة « y » المقابلة من معادلة الدالة $y = f(x)$. وتسمى « y » فى هذه الحالة « بالمتغير التابع » Dependent Variable ثم تكون فئة النقاط (x, y) التى تحقق احداثياتها السينية والصادية معادلة الدالة $y = f(x)$ بعد ذلك نوقع هذه النقاط على المحاور الكرتيزية المتعامدة ونحاول أن نمرر بهذه النقاط منحنى أملسا . ويعتبر المنحنى الأملس المار بهذه النقاط هو التمثيل البيانى لهذه الدالة وسنسوق فيما يلى بعض الأمثلة على طريقة التمثيل البيانى .

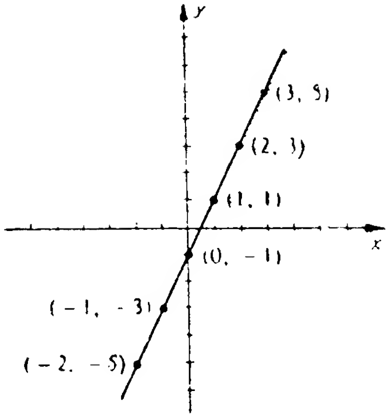
مثال (١) :

ارسم بيانيا المنحنى الذى يمثل الدالة $f : x \longrightarrow 2x - 1$

الحــل :

نفرض قيما اختيارية للمتغير المستقل « x » ونحسب قيم المتغير التابع « y » التى تحقق المعادلة $y = 2x - 1$ المناظرة لكل قيمة مختارة من قيم « x » نجدول البيانات فى جدول كالتالى :

x	−2	−1	0	1	2	3
y = f (x)	−5	−3	−1	1	3	5



شكل ٢ ـ ٤ ـ ١ التمثيل البيانى للدالة $f(x) = 2x - 1$

مثال (٢) :

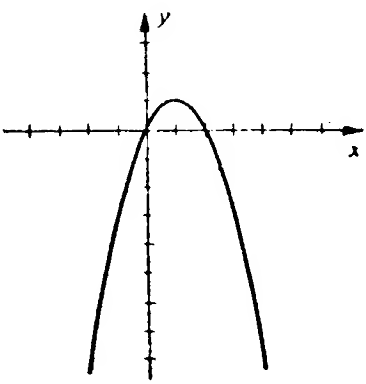
مثل الدالة $g : x \longrightarrow 2x - x^2$ بيانيا

الحل :

مرة اخرى نفترض قيمـــا اختيــــارية للمتغير المستقل « x » ونحسب قيم المتغير التـــابع « y » من المعـــادلة $y = 2x - x^2$ المناظرة لكل قيمة من القيم المختارة للمتغير « x » ونضع القيم فى جدول كالتالى :

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y = g (x)	−8	−3	0	1	0	−3	−8

فاذا وقعنا جميع نقاط الجدول السابق على مجموعة المحـــاور ووصلنا هذه النقاط بمنحنى أملس مبتدئين من النقطة التى احداثيها السينى ـ ٢ ثم النقطة التى احداثيها السينى ـ ١ وهكذا نحصـل على الشكل المقابل وهو ما يسمى بالقطع المكافىء Parabola



شكل ٢ ـ ٤ ـ ٢ التمثيل البيانى للدالة $f(x) = 2x - x^2$

٢ ـ ٤ ـ ١ ـ ملاحظات :

١ ـ لكى يكون منحنى الدالة المراد تمثيلها بيانيا فى الصورة المطلوبة نحتاج احيانا الى نقاط اخرى تحقق احداثياتها معادلة الدالة بحيث يكون احداثياتها او كلاهما كسر مثل النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ كما هو موضح فى الشكل السابق .

٢ ـ بالرغم من امكانية توصيل النقاط التى احداثياتها تحقق معادلة الدالة المراد تمثيلها بيانيا على المحاور بطرق مختلفة الا انه يجب علينا اخذ المسار والتسلسل المعقول لهذه النقط والا فأخذ تسلسل عشوائى لتوصيل النقط بمنحنى املس قد لايمثل الدالة المطلوبة .

٣ ـ يجب أن نلاحظ فى كل من المثالين السابقين أن منحنيات الدوال تقطع محور السينات x — axis فى نقطة (أو نقاط) تكون احد اثياتها الصادية مساوية للصفر ؛ وتسمى الاحداثيات السينية لهذه النقاط « اصفار او جذور المعادلة » Zeros or Roots of Equs وهى الحلول التى تحقق المعادلة $f(x) = 0$.

فمثلا فى المثال (١) تكون القيم الصفرية المعادلة « $2x - 1 = 0$ » هى النقطة التى احداثياتها $(\frac{1}{2}, 0)$ أى ان $x = \frac{1}{2}$, اما فى المثال (٢) نلاحظ ان هناك نقطتين يتقاطع عندهما منحنى الدالة مع المحور السينى وبهذا يكون للمعادلة صفران (أو جذران) $x = 0 , x = +2$ وعليه نعرف مايلى :

٢ ـ ٤ ـ ٢ تعريف : أصفار (جذور) المعادلة
Zeros (Roofs) of Equ. :

صفر (جذر) او اصفار (جذور) أى دالة هو الاحداثى (أو الاحداثيات) السينى للنقطة (أو النقاط) التى يقطع أو يمس عندها منحنى الدالة محور السينات سنتعرض لتطبيقات هذا التعريف بشىء من التفصيل فى بند ٢ـ٧ ونسوق الآن المثال التالى :

مثال (٣) :

ارسم بيانيا الدالة التى تعرفها الفئة زوجية الترتيب

$$\{ (x, y) \} = \{ (x, y) : x \in R , y = |x - 2| \}$$

الحـــل :

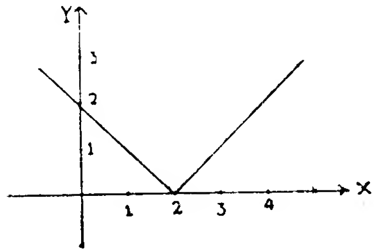
تكون جدولا يحتوى على قيم كل من « x » ، « y » المناظرة كما يلى :

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
y	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4

نلاحظ ان $x = 2$ عبارة عن جذر (صفر) للمعـــــادلة

$$|x - 2| = 0$$

بالرغم من أن المنحنى لا يقطـــع محور السينات . ولكن نلاحظ أنه يقابله عند هذه النقطة .



شكل ٢ — ٤ — ٣

التمثيل البيانى للدالة $y = |x - 2|$

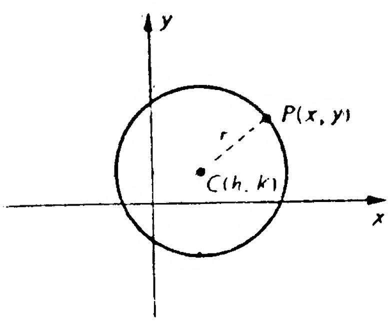
فيما سبق من أمثلة كنا نمثل الدوال تمثيلا بيانيا . على أنه يمكننا بنفس الطريقة التى اتبعناها فى تمثيل الدوال أن تمثل العلاقات وسنوضح هذا فى الأمثلة التالية :

مثال (٤) :

مثل العلاقة $\{ (x, y) : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ بيانيا

الحل :

هـــذه العلاقة تمثل دائرة مركزها عنـــد النقطة (h, k) ونصـــف قطرها « r » والتمثيل البيانى يظهر فى الشكل المقابل



شكل ٢ — ٤ — ٤ —

التمثيل البيانى للعلاقة فى المثال ٤

من المهم ان نلاحظ أن المنحنى ناتج عن التمثيل البيانى للدالة يقطع المحور الصادى مرة واحدة فقط . بينما المنحنى الناتج عن التمثيل البيانى للعلاقة يمكن أن يقطع محور الصادات فى اكثر من نقطة واحدة (لماذا ؟)

مثال (٥) :

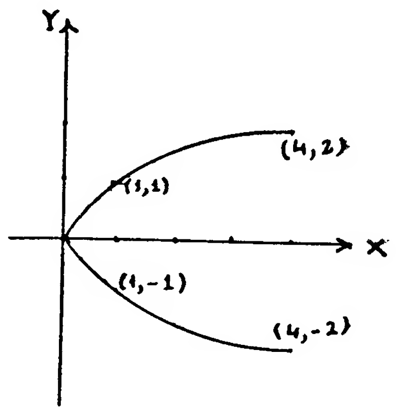
ارسم بيانيا المنحنى الذى يمثل العلاقة $\{ (x, y) , y^2 = x \}$

الحل :

توجـــد قيم « y » بدلالة « x » فى العـــلاقة $y^2 = x$ فنحصل على $y = \pm \sqrt{x}$ وبذلك يسهل بعض الشىء ايجاد جدول النقاط التالى :

x	0	1	4	9	16	25
y	0	±1	±2	±3	±4	±5

وكما هو متوقع توجد قيمتان للمتغير « y » مقابل كل قيمة للمتغير « x » كما هو واضح من الشكل التالى الذى يمثل الرسم البيانى لهذه العلاقة .

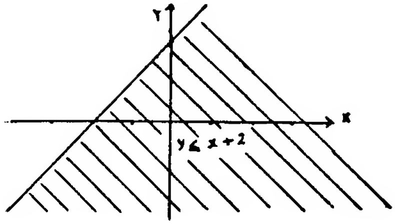


شكل ٢ ــ ٤ ــ ٥ : التمثيل البيانى للعلاقة $y^2 = x$

مثال (٦) :

مثل بيانيا العلاقة $\{ (x, y) : y \leqslant x + 2 \}$

الحـل :



شكل ٢ — ٤ — ٦

التمثيل البيانى للعلاقة المعطاه فى المثال(٦)

لتمثيل هـذه العلاقة بيانيا نمثل الدالة الخطية $y = x + 2$ أولا بالطـريقة المتبعـة فى الأمثلة السابقة . وبعد ذلك يجب ملاحظة أن أى احـداثى « x » للنقطـة (x, y) يكون عنصرا من عناصر العلاقة المعطاة اذا كانت الاحداثيات الصادية لهذه النقاط أقل أو تساوى الاحداثيات الصادية للنقط الواقعة على الخط المستقيم $y = x + 2$; ويكون فى هـذه الحالة الجزء المظلل فى الشكل ٢ — ٤ — ٦ هو عبارة عن التمثيل البيانى للعلاقة .

على انه يمكننا تقسيم الدوال الى دوال فردية ودوال زوجية .

٢ — ٤ — ١ الدوال الفردية :

هذه الدوال هى التى تحقق الشرط

$$f(-x) = -f(x)$$

وهى دالة تمر بنقطة الأصل (ان كانت من ضمن نطـاق الدالة) ومتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل عند تمثيلها تمثيلا بيانيا .

مثـال :

اذا كانت $f(x) = x^3 - 5x$ فاثبت انها دالة فردية .

الحـل :

نطبق الشرط السابق فنجد

$$f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x$$

$$= -(x^3 - 5x) = -f(x)$$

ومن ثم فهى تحقق شرط أن الدالة فردية

— ٤ — ٢ الدوال الزوجية Even Functions :

هذا النوع من الدوال تحقق الشرط $f(-x) = f(x)$.

وهى دالة متماثلة بالنسبة لمحور الصادات عند تمثيلها بيانيا .

مثـــال :

هل الدالة $f(x) = x^4 - 5x^2 + 10$ دالة زوجية ؟

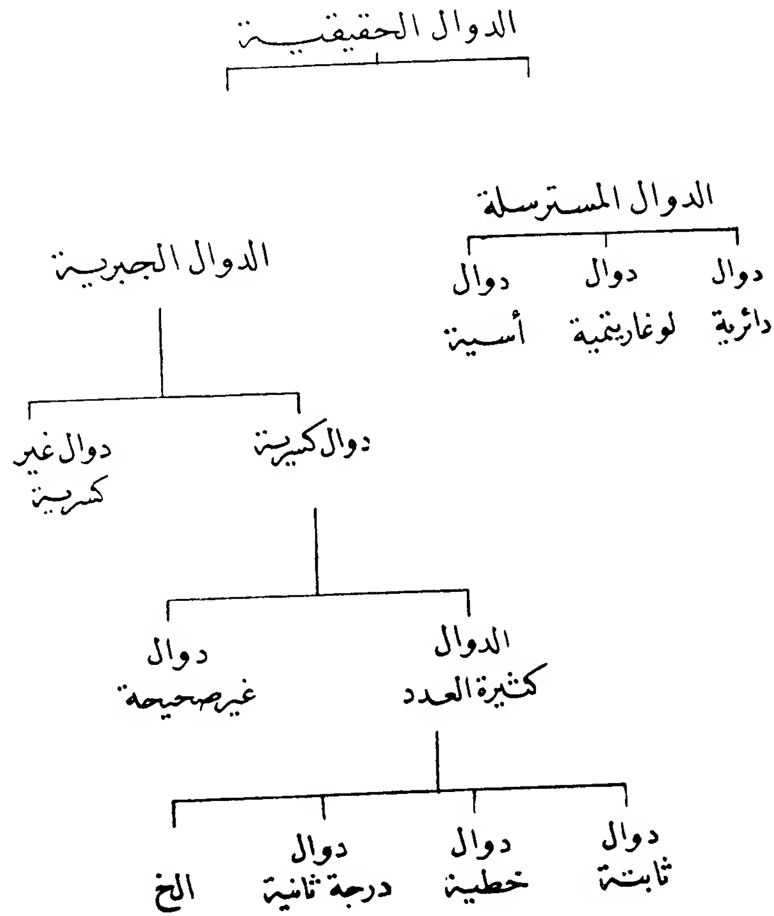
الحـــل :

نطبق الشرط فنجد $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 10$

$$= x^4 - 5x^2 + 10 = f(x)$$

اى ان الشرط محقق اى ان الدالة زوجية .

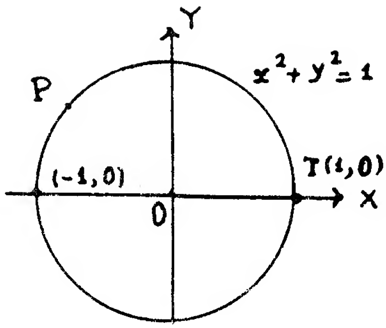
عند دراسة الدوال يمكننا تقسيم الدوال الحقيقية الى عـدة انواع نلخص بعضا منها فى التقسم التالى .



وسنتناول بالدراسة التفصيلية بعضا من الدوال المسترسلة والدوال الكسرية .

بند ٢ ــ ٥ : الدوال الدائرية

Circular Functions :

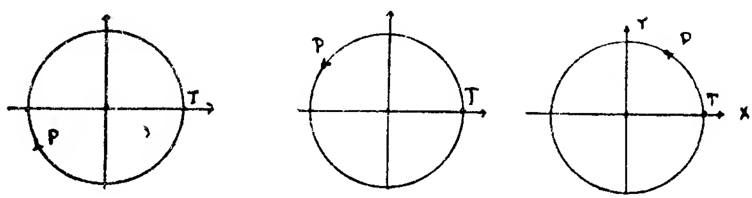


شكل ٢ ــ ٥ ــ ١

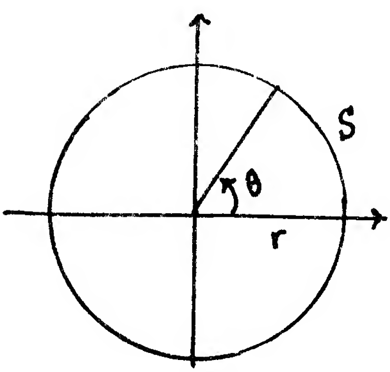
نلاحظ من الشكل ٢ ــ ٥ ــ ١ المقابل ان النقطة T (1, 0) تقع على محيط الدائرة ذات نصف القطر المساوى للوحدة القياسية وذات المركز الواقع عند نقطة الأصل ومعادلة هذه الدائرة هى :

$$x^2 + y^2 = 1$$

فاذا تحركت هذه النقطة على الدائرة متجهة نحو النقطة « P » فانها تقطع مسافة (قوس Arc) ترمز له بالرمز S = TP فاذا عرف طول القوس وتحدد اتجاه الحركة فانه يمكننا عندئذ تحديد النقطة « P » وموقعها على محيط تلك الدائرة بالضبط والأشكال التالية توضح مواقع مختلفة للنقطة « P » المناظرة لأطوال أقواس مختلفة .



شكل ٢ ــ ٥ ــ ٢



شكل ٢ ــ ٥ ــ ٣

ولقد تعلمنا من علم الهندسة ان طول قوس ما على محيط دائرة يتناسب مع طول نصف قطر الدائرة ومع قياس الزاوية المقابلة لهذا القوس أى ان $S = k\, r\, \Theta$ فاذا تم اختيار وحدة قياسية مناسبة للزاوية « Θ » نستطيع التحكم فى جعل ثابت التناسب « k » مساويا للوحدة . ومنه ينتج ان $S = r\, \Theta$

وعليـــه فاذا كان نصف قطر الدائرة هو الوحـــدة فان $\Theta = S$ وبذلك يكون طول القوس مساويا بالقياس الزاوية « Θ » التى يصنعها هذا القوس . ويسمى هذا القياس بالقياس الدائرى .

ويمكن ايجاد العلاقة بين هـــذا التقدير الدائرى والتقدير الستينى الذى تعارفنا عليه من قبل وذلك اذا علمنا ان طول نصف محيط دائرة نصف قطرها الوحـــدة هو π أى ان الزاوية Θ بالتقـــدير الدائرى هى π . بينما نعلم أن هذا القوس يحصر زاوية مقـــدارها 180° بالتقدير الستينى عند المركز وهذا يعنى أن

$$\therefore \quad \pi \times 1^R = 180^\circ \times 1^\circ \quad \therefore \quad 1^R = \frac{180^\circ}{\pi} \, , \quad 1^\circ = \frac{\pi^R}{180^\circ}$$

والجدول التالى يوضح العلاقة بين بعض الزوايا التى يكثر استعمالها فى التقديرين الستينى والدائرى .

بالتقدير الستينى	θ°	30	45	60	90	145	180	225	270	360
بالتقدير الدائرى	θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

فاذا اعتبرنا دائرة نصف قطرها « r » وتحركت النقطة $T(r, o)$ على محيط هذه الدائرة متجهة نحو النقطة « P » فان القوس المقطوع يحدد نقطة واحدة فقط . وهذا يعبر عن دالة وفق مفهوم الدوال . ومن هذا المفهوم ننطلق الى تعريف دالتين دائرتين فى غاية الأهميـــة الأولى هى $\text{sine}(\theta)$ والدالة الثانية هى $\text{Cosine}(\theta)$

٢ ــ ٥ ــ ١ تعريف :

اذا كانت احداثيات النقطة (x, y) فان :

$$\text{Sine}(\theta) = \frac{y}{r} \quad \text{or} \quad \text{sine} : (\theta) \longrightarrow \frac{y}{r} \qquad (\text{أ})$$

(ب) $\text{cosine } (\theta) = \frac{x}{r}$ or $\text{cosine} : (\theta) \longrightarrow \frac{x}{r}$

تختصر الآن تعريف علاقات مختلفة ناتجـة عن الدالتين الدائرتين السـابقتين :

$$\text{Tan } (\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} \text{ OR } \text{tangent } (\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{Cot } (\theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{x}{y} \text{ OR } \text{cotangent } (\theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sec (\theta) = \frac{r}{y} \quad \text{OR} \quad \text{secant } (\theta) = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\csc (\theta) = \frac{r}{y} \quad \text{OR} \quad \text{cosecant } (\theta) = \frac{1}{\sin \theta}$$

هذه هى الدوال الست الدائرية وفى بعض الأحيان يطلق عليهـا الدوال المثلثية Trignometric fns ولقد اطلق عليها هذا الاسم لارتباطها الوثيق بالمثلثات قائمة الزاوية . وسنسوق فيما يلى بعض الأمثلة .

مثال (١) :

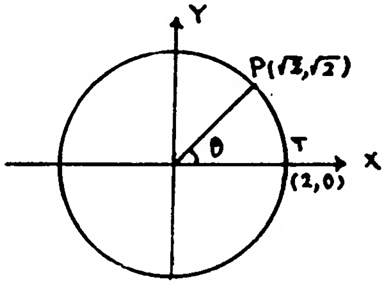
اذا كانت النقطة « P » التى احداثياتها $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ واقعة على محيط دائرة نصف قطرها يساوى (2) اوجد النسب المثلثية (أو الدوال الدائرية) الستة للزاوية المحصورة بين الخط الواصـل بين نقطة الأصل وبين النقطة « P » والخط الواصل بين نقطة الأصل والنقطة التى احداثياتها (2, 0) .

الحـل :

من الشكل المقابل ٢ ــ ٥ ــ ٤ نجد أن :

$$x = \sqrt{2}, \; y = \sqrt{2}, \; r = 2$$

وعليه نجد التالى :



شكل ٢ – ٥ – ٤

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = (1), \qquad \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\csc\theta = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

ويمكن تمثيل الدوال الدائرية (المثلثية) بيانيا على النمط المفهوم الذى استفضنا فيه فى التمثيل البيانى . وسوف نعتبر التمثيل البيانى للدوال .

$$y = a\sin(bx), \quad y = a\cos(bx), \quad y = a\tan(bx)$$

عندما تتغير قيم الثوابت « a , b » ليتسنى لنا ملاحظة الفرق فى التمثيل البيانى لها .

مثال (٢) :

مثل بيانيا كلا من الدوال الدائرية الآتية :

1) $y = \sin x$, 2) $y = \sin \frac{1}{2} x$, 3) $y = \sin 2x$,

4) $y = \frac{1}{2}\sin x$, 5) $y = 2\sin x$, 6) $y = 2\sin 2x$.

الحل :

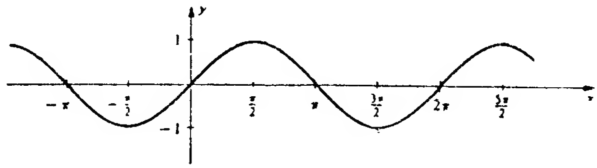
تكون جدولا يحتوى على قيم مفترضة للمتغير المستقل « x » ومن ثم توجد قيم المتغير « y » المناظرة .

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
2 x	-2π	$-\pi$	$-2\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π
½ x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
Sin x	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Sin 2 x	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1	$\sqrt{3}/2$	0	0
2 Sin x	0	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	0
Sin ½ x	-1	$-\sqrt{2}/2$	$-\frac{1}{2}$	$-.4$	0	$.4$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}/2$	1
½ Sin x	0	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}/4$	$-\sqrt{2}/4$	0	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{3}/4$	$\frac{1}{2}$	0

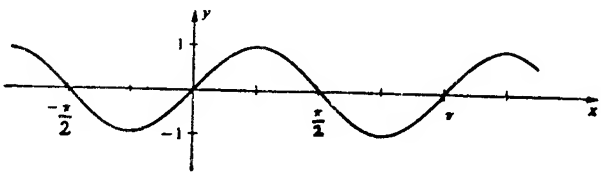
وفيما يلى التمثيل البيانى لكل من الدوال

$\sin \frac{1}{2} x$, $2 \sin x$, $\sin (2x)$, $\sin x$

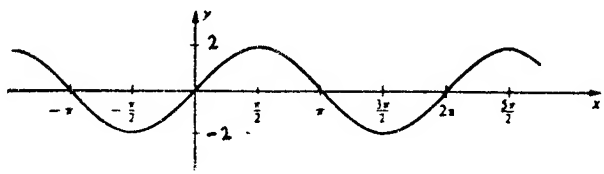
واخيرا $\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x$.



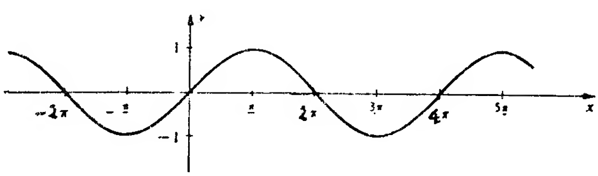
شكل ٢ ــ ٥ ــ ٥ منحنى الدالة $y = \sin x$



شكل ٢ ــ ٥ ــ ٦ منحنى الدالة $y = \sin 2x$



شكل ٢ ــ ٥ ــ ٧ منحنى الدالة $y = 2 \sin x$



شكل ٢ ــ ٥ ــ ٨ منحنى الدالة $y = \text{Sin} \frac{1}{2} x$

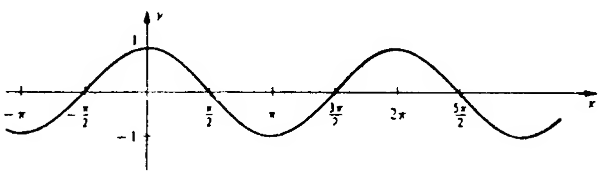
مثال (٣) :

مثل بيانيا الدوال الدائرية الآتية :

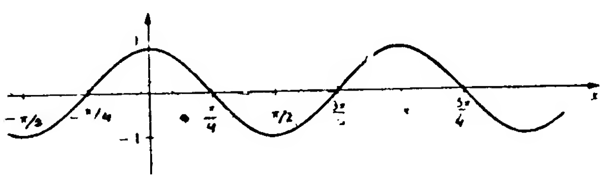
1) $y = \cos x$
2) $y = \cos 2x$
3) $y = 2 \cos x$,
4) $y = 2 \cos 2x$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
2 x	-2π	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π
cos x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
cos 2 x	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	1
2 cos x	-2	0	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	1	0	-2
2 cos 2 x	2	-2	-1	0	2	0	-1	-2	2

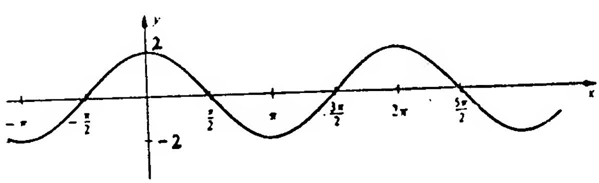
الجدول السابق يبين قيما مختارة للمتغير المستقل « x » وقيــــم « y » المناظرة . وفى الأشكال التالية نوضح تصرف الدوال
$2\cos 2x$, $2\cos x$, $\cos 2x$, $\cos x$



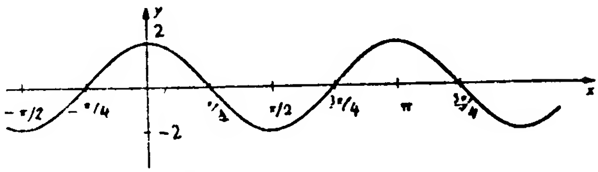
شكل ٢ ــ ٥ ــ ٩ منحنى الدالة $y = \cos x$



شكل ٢ ــ ٥ ــ ١٠ منحنى الدالة $y = \cos 2x$



شكل ٢ ــ ٥ ــ ١١ منحنى الدالة $y = 2\cos x$



شكل ٢ ـ ٥ ـ ١٢ منحنى الدالة $y = 2 \cos 2x$

٢ ـ ٥ ـ ٢ ملاحظـات :

من التمثيل البيانى لكل من الدوال $y = a \sin bx,\ y = a \cos bx$ نلاحظ أن الثابت « a » يغير من قيمة مدى الدالة اى ان :

١ ـ اذا كان « $a = 1$ » فان مدى الدالة هو الفترة المقفلة $[-1, 1]$

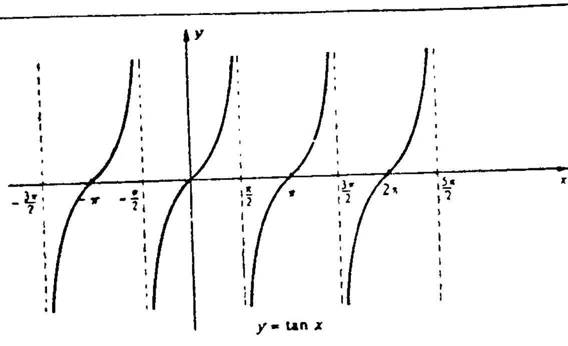
٢ ـ اذا كان $a \neq 1$ فان مدى الدالة هو الفترة المقفلة $[-a, a]$

أما الثابت « b » فيغير من عدد دورات منحنى الدالة .

مثال (٤) :

مثل بيانيا منحنى الدالة $y = \tan x$

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-2\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$2\frac{\pi}{3}$	$3\frac{\pi}{4}$	π
tanx	0	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	0



شكل ٢ ـ ٥ ـ ١٢ منحنى الدالة $y = \tan x$

ونلاحظ على هذا المنحنى انه يؤول الى « $+\infty$ » اذا اقتربنا للقيمة $\frac{1}{2}\pi$ خلال قيم اقل منها بينما يؤول الى « $-\infty$ » اذا اقتربنا للقيمة $\frac{1}{2}\pi$ خلال قيم اكبر منها .

ونفس هذه الملاحظة تنطبق على قيمة $x = -\frac{1}{2}\pi$ وعلى جميع النقط $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ حيث « n » عدد صحيح .

وسنسوق فيما يلي بعض علاقات الدوال الدائرية (المثلثية)

فمن تعريف دالة sine (A) ودالة cos (A) على أساس

$$\sin A = \frac{y}{r} , \qquad \cos A = \frac{x}{r}$$

ومع ملاحظة أن $x^2 + y^2 = r^2$ نحصل على :

1) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

2) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$. نحصل على $\cos^2 A$ على (1) بقسمة

3) $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$. نحصل على $\sin^2 A$ على (1) بقسمة

وباستخدام قوانين حساب المثلثات تجد التالى :

4) $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

5) $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$

وبوضع $A = B$ فى اربعة نجد :

6) $\sin (2 A) = 2 \sin A \cos A$.

7) $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

8) $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

وبوضع $A = B$ فى سبعة نجد :

9) $\cos 2 A = \cos^2 A - \sin^2 A$.

وباستخدام (١) نجد : $= 2\cos^2 A - 1$

أو $= 1 - 2\sin^2 A.$

ومن تسعة نجد :

10) $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A).$

أو

11) $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A).$

وباستخدام (4, 7) نجد :

12) $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

ومن (5, 8) نجد :

13) $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

وباستخدام (4, 5) نجد :

14) $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2\sin A\cos B$

15) $\sin A\cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A + B) + \sin(A - B)\}$

ويمكننا أيضا ايجاد :

16) $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2\sin B\cos A$

أو

17) $\sin B\cos A = \frac{1}{2}\{\sin(A + B) - \sin(A - B)\}$

وباستخدام العلاقتين (7, 8) نحصل على :

18) $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A\cos B$

أو

19) $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A + B) + \cos(A - B)\}$

وأيضا يمكننا الحصول على :

20) $\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\sin A\sin B$

أو

21) $\sin A\sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\}.$

ويمكن صياغة العلاقات الأخيرة فى صور اخرى وذلك بكتابة :

$C = A + B$ ، $D = A - B$

ومن ثم نجد :

$$A = \frac{C + D}{2} , \quad B = \frac{C - D}{2}$$

$$22) \ \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C + D}{2} . \cos \frac{C - D}{2}$$

$$23) \ \sin C - \sin D = 2 \sin \frac{C - D}{2} . \cos \frac{C + D}{2}$$

$$24) \ \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C + D}{2} . \cos \frac{C - D}{2}$$

$$25) \ \cos C + \cos D = 2 \sin \frac{C + D}{2} . \sin \frac{C - D}{2}$$

بند ٢ ــ ٦ الدوال الخطية Linear functions :

٢ ــ ٦ ــ ١ تعريف الدوال كثيرة الحدود « Polynomials »

تعتبر الدالة « f » دالة كثيرة حدود « Polynomial » من الدرجة النونية « n » و « x » اذا عرفت هذه الدالة بالمعادلة التالية :

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad (1)$$

حيث $a_0 \neq 0$, « n » عدد صحيح موجب او صفر ، « a_i » عبارة عن مقادير ثابتة حيث $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ وسنتعرض فيما يلى لحالة خاصة .

٢ ــ ٦ ــ ٢ تعريف الدوال الخطية Linear functions :

الدالة الخطية « f » هى دالة كثيرة حدود من الدرجة الاولى فى « x » اى ان :

$$f(x) = m x + b \quad (2)$$

حيث « b , m » عبارة عن مقادير ثابتة .

ونلاحظ هنا ان الدوال الخطية اخذت هذا الاسم نظرا لأن التمثيل البيانى لمعادلاتها يعطى خطا مستقيما دائما كما هو واضح من المثالين ١ ، ٦ فى بند ٢ ــ ٤ اضف الى ذلك انه يمكننا التعبير عن أى مستقيم (ماعدا « x = b » وهو الخط المستقيم الذى يوازى محور « y » ويقطع محور « x » على بعد « b ») بواسطة المعادلة :

$$y = f(x) = mx + b$$

حيث « m » عبارة عن ميل المستقيم « b, » عبارة عن طول الجزء المقطوع من محور « y » .

مثال (١) :

تعتبر المعادلات الآتية معادلات لدوال خطية :

1) $y = 2x + 1$ 2) $y = x - \frac{1}{2}$

3) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ 4) $y = -3x + 5.$

نود الآن أن نعتبر الاتجاه الذى يأخذه خط مستقيم ، حيث ان الطريقة المنطقية لأداء هذا الغرض هى التعبير عن الزاوية التى يصنعها ذلك الخط المستقيم مع مستقيم آخر . لذلك سوف نتعرض لبعض التعاريف الأساسية فيما يلى :

٢ ــ ٦ ــ ٣ تعريف : زاوية ميل خط مستقيم Angle of Inclination :

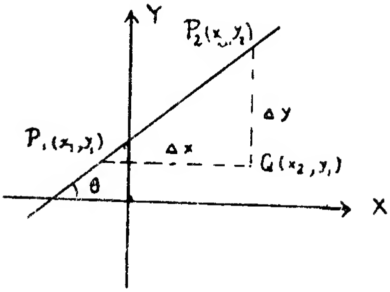
زاوية ميل اى خط مستقيم هى الزاوية « θ » التى يصنعها مع المحور السينى مقاسه من الاتجاه الموجب للمحور السينى فى عكس دوران عقارب الساعة .

٢ ــ ٦ ــ ٤ تعريف ميل الخط المستقيم Slope of a line :

ميل اى خط مستقيم « m » هو عبارة عن الدالة الدائرية «tangent» بالنسبة لزاوية ميل ذلك الخط المستقيم . اى انه اذا كانت زاوية ميل المستقيم هى « θ » فان $m = \tan\theta$.

ونظرا لأن $\tan 90^\circ$ كميةغير محدودة فان ميل الخط المستقيم الذى يوازى محور « y » لايمكن ايجاده . بينما نجد أن ميل الخط المستقيم الذى يوازى المحور السينى ، يساوى صفرا .

اما الطريقة المتبعة فى ايجاد ميل اىخط مستقيم فهىباستخدام الاحداثيات السينية والصادية لنقطتين واقعتين على الخط . ففى الشكل المقابل (شكل ٢ — ٦ — ١) نلاحظ اننا رسمنا جزئى الخطين المستقيمين $\Delta x = x_2 - x_1$ و $\Delta y = y_2 - y_1$ من النقطتين P_2 , P_1 على الترتيب بحيث يوازيان محورى « Y , X » ويتلاقيان فى النقطة « Q » التى احداثياتها (x_2 , y_1) . وبذلك يكون الميل مساويا (حسب التعريف ٢ — ٦ — ٤) .



شكل ٢ — ٦ — ١

$$m = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

اما لو قارنا ايجاد ميل هذا الخط باستخدام نقطتين اخريين P_3 , P_4 لنتجت نفس القيمة « m » التى حصلنا عليها باستخدام P_1 , P_2 اى أن :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

وهذا الكلام منطقى لأن زاوية ميل هذا الخط المستقيم هى نفسها لم تتغير . وتبعا لذلك فان ميله (اى $\tan\theta$) عبارة عن مقدار ثابت دائما للمستقيم الواحد .

٢ — ٦ — ٥ نظرية :

اذا كانت $P_2(x_2 , y_2)$, $P_1(x_1 , y_1)$ نقطتين على خط مستقيم معين فان ميل هذا الخط يساوى

$$m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

مثال (٢) :

اوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين

$(3 , 4)$, $(1 , 2)$

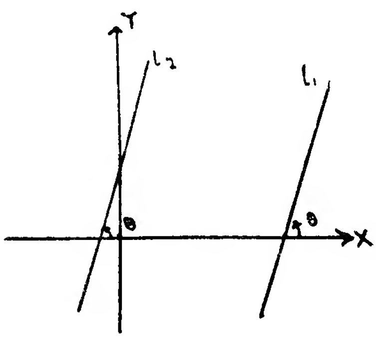
الحـل :

$$m = (y_1 - y_1) / (x_2 - x_1) = \frac{4 - 2}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

هناك خصائص للخطوط المستقيمة سنخص بالتفصيل ها هنا خاصيتى التوازى والتعامد .

٢ ـ ٦ ـ ٦ : التوازى Parllel lines :

اذا توازى الخطان المستقيمان L_1 , L_2 . فان زاوية ميل المستقيم الأول لابد وان تساوى زاوية ميل المستقيم الثانى ومن ثم ينتج تساوى ميليهما والعكس فى هذه الحالة صحيح . أى انه اذا كانت زاوية ميل المستقيم « L_1 » تساوى زاوية ميل المستقيم « L_2 » وكانت الزاويتان مقاستين فى نفس الاتجاه فان الخطين المستقيمين L_1 , L_2 لابد وان يكونا متوازيين .



شكل ٢ ـ ٦ ـ ٢ التوازى

وتصاغ هذه الحقيقة فى النظرية التالية :

نظـرية :

يعتبر الخط المستقيم « L_1 » موازيا الخط المستقيم « L_2 » اذا كان $m_1 = m_2$ والعكس صحيح .

مثال (٣) :

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يوازى المستقيم المار بالنقطتين (1, 2) , (3, 4)

الحـل :

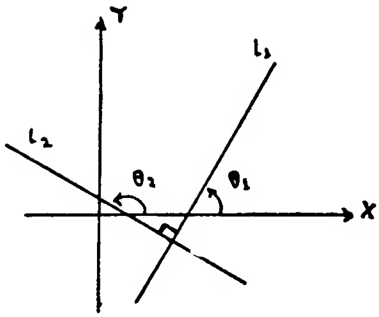
نفرض أن ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين m_1 : (1, 2) , (3, 4) وأن ميل المستقيم المطلوب هو « m_2 » . **وبذلك يكون لدينا :**

$$m_1 = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = \frac{4 - 2}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

ونظرا لتوازى المستقيمين فان « $m_2 = m_1$ » ولذلك يكون « $m_2 = 1$ »

٢ ـ ٦ ـ ٧ التعامد Perpendicular lines :

اذا نظرنا الى الشكل المقابل شكل ٢ ـ ٦ ـ ٣ نجد أن الخطين المستقيمين L_1 , L_2 متعامدان ونلاحظ أيضا ان زاوية ميل احد المستقيمين يجب أن تكون اكبر من زاوية ميل المستقيم الآخر بمقدار 90° فاذا كانت زاوية ميل المستقيم الأول هى « θ_1 » وزاوية ميل



شكل ٢ ـ ٦ ـ ٣ التعامد

المستقيم الثانى هى « θ_2 » فانه يكون لدينا $\theta_2 = 90 + \theta_1$ ولذلك فان

$$\tan \theta_2 = \tan (90 + \theta_1) = - \cot \theta_1 = \frac{-1}{\tan \theta_1}$$

اى ان :

$$m_2 = - \frac{1}{m_1} \quad \text{or} \quad m_1 m_2 = -1.$$

ويمكن صياغة ذلك فى صورة النظرية الآتية :

نظرية :

يتعامدان المستقيمان اذا كان ميل احدهما يساوى ناقص مقلوب ميل الآخر اى ان :

$$m_1 = - \frac{1}{m_2}$$

٣ ـ ٦ ـ ٨ ـ الصور العامة لمعادلة الخط المستقيم :

نجمل فيما يلى الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم اذا علم معلومتان عنه .

١ ـ اذا علم الميل « m » ونقطة $P_1 (x_1, y_1)$ يمر بهـا فان المعادلة هى :

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

٢ ـ اذا علم نقطتان $P_1 (x_1 , y_1)$, $P_2 (x_2 , y_2)$ يمر بهما المستقيم فالمعادلة فى الصورة .

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_1}$$

٣ ـ اذا علم طول الجزء المقطوع من محور « X » وليكن « a » وطول الجزء المقطوع من محور « Y » وليكن « b » فان معادلة المستقيم فى هذه الحالة هى (المستقيم لا يمر بنقطة الأصل) .

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

٤ ـ اذا علم الميل « m » والجـزء « b » المقطوع من محور « Y » فان المعادلة تصبح

$$y = m x + b$$

٥ ـ اذا علم طول العمود الساقط من نقط الأصل على المستقيم وليكن الطول هو « p » وكذلك ميل هذا العمود على الأفقى ولتكن الزاوية « θ » فان المعادلة تصير

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p.$$

مثـال (٤) :

أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين :

$(1, 1)$, $(4, 6)$

الحـل :

الصورة للمعادلة فى هذه الحالة هى :

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{6-1}{4-1} = \frac{5}{3}$$

$$3(y-1) = 5(x-1)$$

$$\therefore \quad 3y - 5x + 2 = 0$$

مثـال (ه) :

اوجد معادلة الخط المستقيم الذى طول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل $= \sqrt{2}$ ويميل هذا العمود على الأفقى بزاوية $\frac{\pi}{4}$.

الحـل :

الصورة العامة للمعادلة فى هذه الحالة هى :

$$x \cos \frac{\pi}{4} + y \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad \therefore \quad x + y = 2.$$

بند ٢ ـ ٧ ـ كثيرات الحدود والمعادلات
: EQUATIONS AND POLYNOMIALS

هذا النوع من الدوال له أهمية خاصة اذ يظهر فى العديد من المسائل الرياضية والفيزيائية والتطبيقية ولقد سبق وعرفنا هذه الدالة فى (٢ـ٦ـ١) وكما علمنا فان الدالة

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

حيث « $a_0 \neq 0$ » تمثل دالة كثيرة الحدود من درجة « n » . ولقد درسنا فى البند السابق بعض الخصائص الهندسية لمعادلة الدالة كثيره الحدود من الدرجة الأولى « الدالة الخطية » . وسنركز فى هذا البند على عدد من الخواص الجبرية لهذا النوع من الدوال وخصوصا الجذور وسنتدرج فى معالجة هذه الدالة من الدالة الخطية الى مايتبع ذلك .

٢ ـ ٧ ـ ١ كثيرة الحدود من الدرجة الأولى (الدالة الخطية) :

كما علمنا من البند السابق هذه دالة خطية ومعادلتها فى الصورة

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x \qquad (a_1 \neq 0)$$

وكما ظهر لنا من قبل فتمثيلها بيانيا هو خط مستقيم ميله « a_1 » ويقطع مسافة « a_0 » ن المحور الصادى (Y — axis) . ولندرس الآن جذور هذه المعادلة .

سبق أن عرفنا (راجع ٢ ـ ٤ ـ ١) أن جذور المعادلة هى قيم « x » التى تحقق $y = f(x) = 0$ وهندسيا هى نقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات (X — axis) وبالنسبة لحالتنا هنا (أى المعادلة الخطية) فان هناك جذرا واحدا يعطى من :

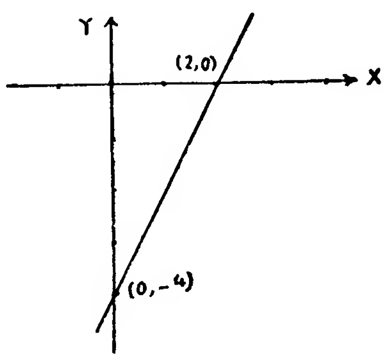
$$a_0 + a_1 x_1 = 0 \quad \therefore \quad x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$$

مثـال (١) :

ارسم منحنى الدالة $y = 2x - 4$ واوجد جذرها

الحـل :

جبريا نجد أن جذر المعادلة يعطى من « $y = 0$ » أى :



شكل ٢ ـ ٧ ـ ١ جذر المعادلة
$y = 2x - 4$

$$2x - 4 = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{4}{2} = 2$$

بينما هندسيا هو الاحداثى السينى لنقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور السينى وهذه النقطة هى (2, 0) . اى أن الجذر كما سبق هو $x = 2$.

٢ ـ ٧ ـ ٢ كثيرة الحدود من الدرجة الثانية :

معادلة كثيرة الحدود هذه تكون على الصورة :

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (a_2 \neq 0)$$

ويطلق على منحنى هذه الدالة اسم القطع المكافىء ولقد تعرضنا لمثال ذلك فى مثال (بند ٢ ـ ٤) . وسيكون هناك مجالا لدراسة مثل هذا المنحنى تفصيليا فى وقت لاحق ولنتعرض الآن الى جذور معادلة دالة من هـذا النوع .

فى هذه الحالة ننظر الى حل للمعادلة $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$ جبريا او ننظر (هندسـيا) الى نقط تقاطع منحنى الدالة $y = f(x)$ مع المحور السينى والحل الجبرى لهذه المعادلة هو :

$$x = (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2})/(2 a_2).$$

يطلق على المقدار $(a_1^2 - 4 a_0 a_2)$ اسم المميز Discriminant دراسة هذا المميز تبين هل الجذور حقيقية او غير حقيقية ودراسة هـذا المميز سنفرد لها مايلى :

اولا ـ اذا كان المميز موجبا Positive Discriminant :

فى هذه الحالة يكون للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين هـما x_1 , x_2 ومنحنى الدالة يقطع المحور السينى فى نقطتين مختلفتين هـما $(x_1 , 0) , (x_2 , 0)$.

مثـال (٢) :

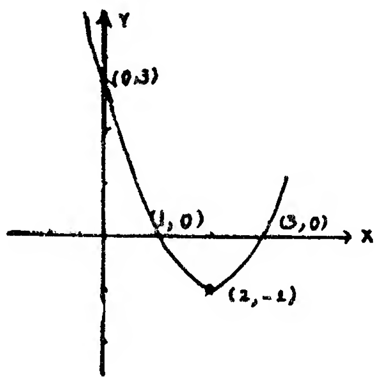
جد جذرى للمعادلة :

$$y = x^2 - 4x + 3$$

الحـل :

تحل جبريا المعادلة $x^2 - 4x + 3 = 0$ وتجد ان الجذرين هما :

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(4 \times 4) - 4 \times 3 \times 1}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$



شكل ٢ — ٧ — ٢ جذور المعادلة
$y = x^2 - 4x + 3$

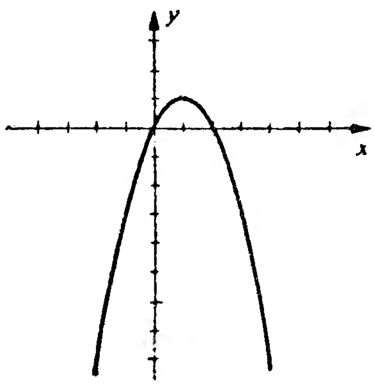
ونلاحظ هنا ان المميز موجب ويكون الجذران هما

$$x = \frac{4 + 2}{2} = 3 ,$$

$$x = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

يمكننا ايضا تحليل المعادلة الى عواملها الأولية وهذه الحالة بسيطة اذ انها $(x - 3)\ (x - 1) = 0$ وتعطى الجذران $x = 1 , x = 3$ ايضا . اما هندسيا فكما هو مبين بالرسم المقابل فان الجذرين هما الاحداثيان السينيان لنقطتى التقاطع .

مثال (٣)



شكل ٢ — ٧ — ٣ جذور المعادلة
$-x^2 + 2x = 0$

جد جذرى المعادلة
$y = -x^2 + 2x$

الحل :

الجذران فى هذه الحالة عند

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 0}}{-2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2}{-2}$$

مرة اخرى المميز هنا موجب والجذران هما :
$x \in \{ 0, 2 \}$

ويمكننا ايضا تحليل المعادلة الى عواملها الأولية لتصير $-x\ (x - 2) = 0$ لتعطى الجذرين $x = 0, x = 2$

ومن الواضح هندسيا كما فى الشكل أن جذرى المعادلة هما الاحداثيات السينية لنقطتى التقاطع $(0, 0)$, $(2, 0)$ مع المحور السينى

ثانيا ـ ان كان المميز صفريا Zero Ducriminont :

فى هذه الحالة ينطبق جذرا المعادلة $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$ اى يصير جذرا المعادلة متساويين والتفسير الهندسى لهذا هو تماس المنحنى $y = f(x)$ مع المحور السينى عند النقطة $\left(x = \frac{a_1}{2 a_2}, 0\right)$

مثـال (٤) :

جد جذرى المعادلة $x^2 - 2x + 1 = 0$

الحـل :

جذرا المعادلة هما :

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

وكما هو واضـح فان المميز صفرى ويكون الجذران هما :

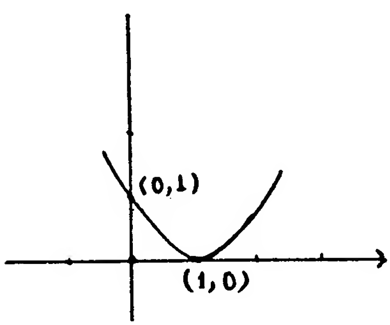
$\{1, 1\}$

أى أن الجذر مكرر

واذا اسـتخدمنا طريقـة التحليل الى عوامل أوليـة فان المعادلة هى :

$$(x - 1)^2 = 0$$

والجذران كما سبق هما $\{1, 1\}$



شكل ٢ ـ ٧ ـ ٤ جذر المعادلة

وعندما نرسـم منحنى الدالة $y = f(x)$ فى الحيـز $[0, 2]$ فمن الواضـح ان المنحنى يمس المحور السـينى عند النقطة $(1, 0)$ والاحداثى السينى لهذه النقطة هو الجذر المكرر للمعادلة [يجب ملاحظـة ان نقطة التماس ان هى الا نقطتا تقاطع منطبقتان] .

ثالثا ــ اذا كان المميز سالبا Negative Dircriminant :

فى هذه الحالة لا يكون للمعادلة $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$ أى جذر على فئة الأعداد الحقيقية . ولكن يكون لها جذور على فئة الأعداد المركبة . والتفسير الهندسى لهذا أن منحنى الدالة $y = f(x)$ لا يقطع المحور السينى على الاطلاق .

مثــال (٥) :

جد جذرى المعادلة

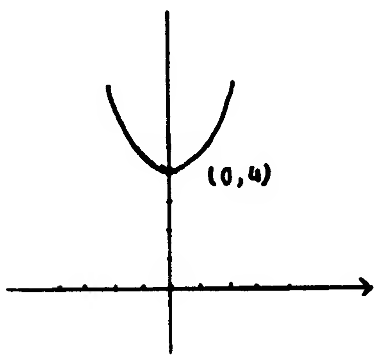
$$y = x^2 + 4 = 0$$

الحــل :

فى هذه الحالة

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0 - 4}}{2}$$

من الواضح ان المميز كمية سالبة وعليه سيكون الجذر تخيليا. ومعنى هذا انه لايوجد جــــذر المعادلة على فئة الأعداد الحقيقية.



شكل ٢ ــ ٧ ــ ٥ جذور المعادلة

ومن الواضح انه لايمكن تحليل هذه المعادلة الىعوامل اولية حقيقية والتمثيل الهندسىلمنحنى الدالة $y = f(x)$ كما فى الشكل المقابل . وكما يظهر فان هذا المنحنى لايقطع المحور السينى اطلاقا . وهذا مما يدل على انه ليس للمعادلة $x^2 + 4 = 0$ اى جذور حقيقية .

العلاقة بين جذرى المعادلة والمعاملات (a_0 , a_1 , a_2) :

نتعرض للعلاقة عموما وتفصيلا فى (٢ ــ ٧ ــ ٥) ولكن فى هـــذه الحالة نود أن نبنى العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملاتها على وجه الخصوص .

فكما هو واضح ان جذرى المعادلة : $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ همــا :

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4\, a_0\, a_2}}{2\, a_2} \; , \; x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4\, a_0\, a_2}}{2\, a_2}$$

فمن الملاحظ ان $x_1 + x_2 = \dfrac{-a_1}{a_2}$

اى ان مجموع الجذرين = $\dfrac{- \text{معامل } x}{\text{معامل } x^2}$.

بيمنا نجد ان $x_1\, x_2 = \dfrac{a_0}{a_2}$

اى ان حاصل ضرب الجذرين = $\dfrac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } « x^2 »}$ (لاحظ انه يمكننا جعل معامل « x^2 » هو الوحدة) .

مثـال (٦) :

ماهى المعادلة التى جذراها { 2 , 3 } ?

الحـل :

لنفترض ان معامل « x^2 » هو الوحدة اى ان المعادلة فى الصورة

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

ومن ثم يكون مجموع الجذرين $\dfrac{-a_1}{a_2} = -a_1$ اى $-a_1 = 2 + 3 = 5$

ومن ثم يكون حاصل ضرب الجذرين $\dfrac{a_0}{a_2} = a_0$ اى $a_0 = 2 \times 3 = 6$

وتكون المعادلة هى :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

حـل آخر :

حيث أن المعادلة جذراها { 2, 3 } فمعنى ذلك أنه يمكننا كتابتها في الصورة $(x - 2)(x - 3) = 0$

وهذه أيضا تعطى المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$

(يجدر ملاحظة أن الجذرين { 3 , 2 } هما عوامل الحد المطلق ، اذا كان معامل « x^2 » هو الوحدة) .

٢ ـ ٧ ـ ٣ تحليل كثيرات الحدود الى عواملها الأولية Factorization :

والعامل هو الكمية التى تقبل الدالة القسمة عليهـا بدون باقى . وتستخدم هذه العوامل فى ايجاد جذور المعادلات التى تحتوى على الدوال كثيرة الحدود . وتتلخص الطريقة فى تحليل كثيرة الحدود الى مجموعة من الأقواس يحتوى كل منها على دوال خطية أو من الدرجة الثانية وبعد ذلك فان أى قيمة للمتغير « x » تجعل واحدا على الأقل من هـذه الأقواس (العوامل) مساويا للصفر تكون جذرا من جذور المعادلة .

ولمعـرفة ما اذا كان المقدار $(x - r)$ مثلا عاملا من عوامل الدالة $y = f(x)$ فاننا نجرى عملية قسمة الدالة $f(x)$ على العامل $(x - r)$ فاذا كان الباقى صفر فمعنى هذا ان المقدار $(x - r)$ عامل من عوامل الدالة $f(x)$ ، أما اذا كان الباقى لايساوى صفر فان المقدار $(x - r)$ لايمكن أن يكون عاملا من عوامل الدالة $f(x)$. وسنسوق الآن مثـالا ونوضح طريقة للقسمة فيما يلى :

مثـال (٧) :

هل المقدار $(x - 3)$ عامل من عوامل $3x^3 - 11x^2 - 1$

الحـل :

نستخدم طريقة القسمة

$$\begin{array}{r|l} x - 3 & 3x^3 - 11x^2 \qquad - 1 \\ \hline 3x^2 - 2x - 6 & 3x^3 - 9x^2 \\ & \overline{\quad - 2x^2 \qquad - 1} \\ & - 2x^2 + 6x \\ & \overline{\quad -6x - 1} \\ & -6x + 18 \\ & \overline{\quad - 19} \end{array}$$

معنى هذا أن خارج القسمة هو :

$$\frac{3x^3 - 11x^2 - 1}{x - 3} = 3x^2 - 2x - 6 - \frac{19}{x - 3}$$

اى ان $(x - 3)$ ليست عاملا من عوامل $3x^3 - 11x^2 - 1$

وهذا النوع من القسمة كما لا يخفى مطول وهناك تطوير لهذه العملية يسمى بالقسمة التركيبية وهو ماسنتعرض له فيما يلى :

طريقة القسمة التركيبية Synthetic Division :

لشرح هذه الطريقة نبدأ بالمثال الذى سقناه انفا وبدلا من كتابة الدالة كلها نستخدم المعاملات فقط فعلية تكتب سطور القسمة السابقة كما يلى :

1 −3	3	−11	0	−1	
3 −2 −6	(3)	−9			
		−2	0	−1	الباقى الأول
		(−2)	+6		
			−6	−1	الباقى الثانى
			(−6)	18	
				−19	الباقى الثالث

ومن الملاحظ أن الأرقام التى حددناها هى تكرار لما فوقها وهى نفسها معاملات الباقى وعليه فيمكننا حذف هذا التكرار وكذلك نحذف (١) من العامل فنحصل على :

−3	3	−11	0	−1
		−9		
		−2	0	−1
			6	
			−6	−1
				18
				−19

ويمكننا ان نحرك تلك الأرقام الى أعلى لنحصل فقط على ثلاثة سطور هى كما يلى :

−3	3	−11	0	−1	السطر الأول
		−9	6	18	السطر الثانى
	3	−2	−6	−19	السطر الثالث

وواضح ان هذه الأرقام هى معاملات الباقى . واضح اننا نستعمل الطرح فى هذه العملية . ولكن هناك طريقة اخرى هى ان تستخدم الجمع وذلك بأن تبدل (ـ ٣) الى (٣) كما يلى :

3	−11	0	−1	3	السطر الأول
	9	−6	−18		السطر الثانى
3	−2	−6	−19		السطر الثالث

وهى نفس النتيجة السابقة . ونشرح الطريقة فيما يلى :

نكتب فى السطر الأول معاملات الدالة مع وضع صفر مكان الأس الغائب (حل محل معامل « x » صفر فى هذه الحالة) ونكتب(٣) فى مربع وهو المقدار المراد اثباته أنه جذر من الجذور . ثم ننزل أول رقم الى السطر الثالث ونضرب هذا الرقم فى المقدار (٣) ويظهر هذا فى السطر الثانى (٩) ثم نجمع وتظهر النتيجة فى السطر الثالث ثم نضرب مانتج فى الرقم (٣) ونضع حاصل الضرب فى السطر الثانى وهكذا نكرر الطريقة ولتثبيت هذه الطريقة نسوق بعض الأمثلة .

مثـال (٨) :

اقسم الدالة $2x^4 - 3x^2 - 4x + 3$ على $(x - 2)$

الحـل :

نطبق الطريقة السابقة بكتابة معاملات الدالة فى السطر الأول مع المقدار (٢) ثم نجرى الطريقة :

2	0	−3	−4	3	2
	4	8	10	12	
2	4	5	6	15	

وعليه نجد ان ناتج القسمة هو :

$$2x^3 + 4x^2 + 5x + 6 + \frac{15}{x - 2}$$

مثـــال (٩) :

هل المقدار $(x - \frac{1}{2})$ عامل للدالة $8x^4 - 4x^3 + 2x - 1$ ؟

الحــل :

نبنى الطريقة السابقة .

8	−4	0	2	−1	$\frac{1}{2}$
	4	0	0	1	
8	0	0	2	0	

وهذا يعنى ان الناتج هو :

$$8x^3 + 0x^2 + 0x + 2 + \frac{0}{x + \frac{1}{2}} = 8x^3 + 2$$

اى ان $x - \frac{1}{2}$ هو احد عوامل الدالة وينتج ان $x = \frac{1}{2}$ هو احـــد جذور المعادلة $8x^4 - 4x^3 + 2x - I = 0$

مثـــال (١٠) :

اقسم $x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 15x - 2$ على $(x - 3)$

الحــل :

1	−5	8	15	−2	3
	3	−6	6	63	
1	−2	2	21	61	

يكون الناتج هو :

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 21 + \frac{61}{x - 3}$$

٢ ـ ٧ ـ ٤ : بعض النظريات الجبرية فى المعادلات :

فيما يلى سنعرض لبعض النظريات الخاصة بالمعادلات

نظرية (١) نظرية الباقى :

اذا قسمت كثيرة الحــــــدود $f(x)$ على $(x - r)$ حيث « r » ثابت حتى نتج باقيــــا لايحتوى « x » فان هذا الباقى $= f(r)$ وتوضع رياضيا كما يلى :

$$\frac{f(x)}{x - r} = q(x) + \frac{R}{x - r} \qquad \therefore\ R = f(r) .$$

(اذا كانت $f(x)$ من درجة « n » فان $q(x)$ تكون من درجة $n - 1$ لماذا ؟) .

البرهــان :

حيث ان :

$$\frac{f(x)}{x - r} = q(x) + \frac{R}{x - r}$$

فبالضرب فى $(x - r)$ نحصل على :

$$f(x) = q(x)(x - r) + R$$

وحيث « R » لاتعتمد على « x » فعند التعويض عن $x = r$ نحصل على :

$$f(r) = R$$

نظرية (٢) (نظرية العامل) :

الدالة $(x - r)$ عامل من عــوامل $f(x)$ اذا كان واذا كان فقط $f(r) = R = 0$.

البرهــان :

اذا كان $f(r) = R = 0$ فانه من النظرية السابقة نجد ان :

$$f(x) = (x - r)\,q(x) + R = (x - r)\,q(x).$$

وهذا يعنى ان $(x - r)$ عامل من عوامل $f(x)$.

وبالعكس اذا كان $(x - r)$ عامل من عوامل $f(x)$ يمكننــا كتابة $f(x)$ فى الصورة $f(x) = (x - r)\,q(x)$

وعليه نجد ان $f(r) = 0$ اى ان $R = 0$

وسنسوق الآن بعض الأمثلة على هاتين النظريتين .

مثال (١١) :

اثبت ان $(x - 5)$ عامل من عوامل

$$f(x) = x^3 - x^2 - 25x + 25$$

الحل :

نستخدم طريقة القسمة التركيبية فنجد ا

1	−1	−25	25	5
	5	20	−25	
1	4	−5	0	

واضح ان $R = 0$ فمن النظرية (٢) نجد ان $f(5) = 0$ اى ان $(x - 5)$ هو احد عوامل الدالة $f(x)$. وهناك طريقة اخرى وهى مجرد التعويض

$$f(5) = 5^3 - 5^2 - 25 \times 5 + 25 = 0$$

مثال (١٢) :

هل المقدار $(x + 2)$ عامل للدالة $f(x) = x^4 - 2x + 1$

الحل :

نستخدم طريقة القسمة التركيبية فنجد ان :

1	0	0	−2	1	−2
	−2	4	−8	20	
1	−2	4	−10	21	

وواضح ان الباقى لا يساوى صفرا . وهذا يعنى ان $x + 2$ ليست عاملا من عوامل الدالة $f(x)$

اما طريقة التعويض فتعطى

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2) + 1 = 21.$$

مثال (١٣) :

وضـــــح ان $(x + 1)$ هـو أحـــــد عـوامل الـدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ ومن ثم أوجد باقى العوامل .

الحــل :

القسمة التركيبية تكون ذات فائدة كبيرة كما يظهر مما يلى :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 6 & -1 \\ & -1 & 5 & -6 & \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

واضح ان الباقى صفر ونجد ان الدالة يمكن كتابتها فى الصورة :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$$

والمقدار الأخـير مقدار ثلاثى يمكن تحليلة مباشرة فنحصـل على الصورة الآتية :

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

سنعرض فيميا يلى النظرية الأساســية فى الجبر بدون برهان لأن برهانها يحتاج الى طرق ومفاهيم بعيدة عن متناول هذا المنهج .

النظرية الأساسية فى الجبر :

اذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من درجة $n \geqslant 1$ ولها معـــاملات حقيقية أو مركبة فانه يوجد مقدار « b » (مركب أو حقيقى) بحيث يحقق $f(b) = 0$. ومن هذه النظرية يمكننا استنتاج النظرية التالية :

نظــرية :

اذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من درجة $n > 0$ ذات معـــاملات حقيقية أو مركبة فانه يوجد لهـــا عدد « n » من الجذور (ليس من الضرورى أن تكون هذه الجذور كلها مختلفة) .

البرهان :

من النظرية الأساسية نرى ان لابد وأن يوجد عدد « r_1 » مثلا بحيث $f(r_1) = 0$ ومعنى هذا ان $(x - r_1)$ عامل من عوامل $f(x)$ اى انه يمكن كتابه $f(x)$ فى الصورة :

$$f(x) = (x - r_1)\, q_1(x)$$

حيث $q_1(x)$ كثيرة حدود من درجة $(n-1)$ وبتطبيق نفس النظرية عليها نجد ان $q_1(r_2)$ تساوى الصفر ومنها نجد ان $(x-r_2)$ عامل من عوامل $q_1(x)$ ومنه نري أن :

$$q_1(x) = (x-r_2)\, q_2(x) .$$

اى أن :

$$f(x) = (x-r_1)(x-r_2)\, q_2(x) .$$

وباجراء هذا على « q_2 » وبالتالى على « q_3 » فاننا نصل الى :

$$f(x) = (x-r_1)(x-r_2) \ldots (x-r_n)\, q_n(x)$$

حيث $q_n(x)$ كثيرة حدود من رتبة $n-n=0$ ولها الحد الأساسى

$$q_n(x) = a_n .$$

« a_n » ومنها ينتج أن :

اى انه يمكننا ان نكتب الدالة $f(x)$ فى الصورة القياسية :

$$f(x) = a_n (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) \ldots (x-r_n)$$

ومن الواضح ان $f(x)$ تساوى صفرا عندما تكون « x » احد عناصر الفئة « X »

$$x \in X = \{ r_1 , r_2 , r_3 , \ldots , r_n \}$$

اى ان $f(x)$ لهـا « n » من الجذور (وليس من الضرورى أن تكون مختلفة) .

ويتبقى بعد ذلك ان نثبت انه لايوجد هناك اى جذر آخر للمعادلة $f(x)=0$ ولاثبات ذلك نفترض أن هنـاك جذرا آخر « r » مثلا وهو لا يساوى اى من عناصر فئة الجذور $\{ r_i \}$.

فنجد تبعا لذلك أن

$$f(r) = a_n (r-r_1)(r-r_2)(r-r_3) \ldots \ldots (r-r_n)$$

ولكن لايوجد اى عامل من عوامل $f(x)$ مساويا للصفر وذلك للفرض من الأساس وهو ان « r » ليست اى من الجذور $\{ r_i \}$ وهذا يعنى ان $f(r) \neq 0$ مما يبين ان « r » ليست جذرا من جذور المعادلة $f(x)=0$.

وهذا يثبت ان المعادلة $f(x)=0$ ليس لها سوى الجذور

$$\{ r_1 , r_2 , r_3 , \ldots \ldots , r_n \}$$

ملحوظة :

اذا تكرر العامل $(x - r_1)$ عـــدد « m » من المرات فى الصــورة القياسية للدالة $f(x)$ فاننا نطلق على الجذر « r_1 » أن له درجة تكرار m .

فمثلا الدالة :

$$f(x) = (x+3)^3 (x-2)^2 (x-5)(x-6)$$

كثيرة حدود من الدرجة السابعة . والجذر (-3) مكرر ثلاث مرات بينما يتكرر الجذر (2) مرتين فقط . والجذور هى :

$$\{-3, -3, -3, 2, 2, 5, 6\}.$$

مثـــال (١٤) :

أوجد جذور المعادلة

$$f(x) = (x^2 - 4)^2 (x^2 - 5x + 6) = 0.$$

الحـــل :

يمكننا تحليل الدالة $f(x)$ الى العوامل الأولية الآتية :

$$f(x) = (x-2)^2 (x+2)^2 (x-2)(x-3)$$

$$= (x-2)^3 (x+2)^2 (x-3)$$

ومن ثم نجد أن جذور المعادلة $f(x) = 0$ هى :

$$\{-2, -2, +2, +2, +2, 3\}$$

أى أن الجذر (٢) جذر ثلاثى ، والجزر (ــ ٢) ثنائى بينما الجزر (٣) احادى .

٢ ــ ٧ ــ ٥ العلاقة بين الجذور والمعاملات :

لقد توصلنا الى أن الدالة :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \qquad (1)$$

قد امكن تحليلها الى عواملها وتصبح فى الصورة :

$$f(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \dots \dots (x - r_n) \qquad (2)$$

وهاتان الصورتان متماثلتان اذ انهما يعبران عن نفس الدالة ومن ثم فان فككنا هذه العوامل فلابد أن تتطابق الصورتان .

فبفك عوامل الصورة الثانية نحصل على :

$$f(x) = a_n [x^n - x^{n-1} (r_1 + r_2 r_3 + \ldots\ldots + r_n) +$$
$$+ x^{n-2} (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots\ldots + r_{n-1} r_n) +$$
$$+ \ldots + (-1)^n r_1 r_2 r_3 \ldots\ldots r_n] \qquad (3)$$

وبمطابقة هذه الصورة مع الصورة (١) نرى الآتى :

معامل « x^n » فى الصورة (١) هو « a_n » وفى الصورة (٣) هو « a_n ». ايضا معامل x^{n-1} فى الصورة (١) هو a_{n-1} بينما فى الصورة (٣) هـو :

$$- a_n (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots\ldots + r_n)$$

يجب ان يتساوى هذان المقداران وهذا يعنى أن :

$$(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots\ldots + r_n) a_n = - a_{n-1}$$

او بصورة أخرى :

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = r_1 + r_2 + \ldots + r_n) = - \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

أى أن مجموع الجذور $= - \dfrac{x^{n-1}\ \text{معامل}}{x^{n}\ \text{معامل}}$

وعندما ننظر الى معامل x^{n-2} فى الصورة (١) فنجد أنه $= a_{n-2}$

ولكن فى الصورة (٣) هو $a_n (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n)$

يجب أن يتطابق هذان المعاملان : أى :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (r_i r_j) = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n$$

$$= \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

اى ان مجموع حاصل ضرب الجذور ثنائيا = (ـ ١)٢ $\dfrac{\text{معامل } x^{n-2}}{\text{معامل } x^{n}}$

وفى النهاية نجد ان الحد المطلق « a_0 » يجب ان يساوى $(-1)^n a_n (r_1 r_2 \ldots r_n)$ وهذا يعنى أن :

$$r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

اى ان حاصل ضرب الجذور = $\dfrac{(-1)^n \text{ الحد المطلق}}{\text{معامل } x^n}$

سنسوق الآن بعض الأمثلة لتوضيح هذه النقط .

مثـال (١٥) :

اوجد العلاقات بين الجذور والمعاملات للمعادلة

$$2x^2 + 5x - 7 = 0$$

الحـل :

حيث أن هذه المعادلة من الدرجة الثانية فيكون لها جذران همـا r_1 , r_2 ومن تم نجد أن :

$$r_1 + r_2 = \frac{-5}{2} \quad , \quad r_1 r_2 = \frac{-7}{2}$$

ومن الملاحظ انه يمكن تحليل هذه المعادلة الى :

$$(x - 1)(2x + 7) = 0$$

وواضح أن الجذرين هما $(1, -3\tfrac{1}{2})$ وواضح ان مجموعهمـا هو $-2\tfrac{1}{2}$ وحاصل ضربهما $\dfrac{-7}{2}$. يمكننا الحصول ايضا على $r_1^2 + r_2^2$

ويمكن الحصول عليها كما يلى :

$$r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2 r_1 r_2 = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-7}{2}\right)$$

$$= \frac{25}{4} + 7 = 13\tfrac{1}{4}$$

وهناك طريقة اخرى وهى ان r_1 , r_2 تحققان المعادلة نفسها فيكون

$$2 r_1^2 + 5 r_1 - 7 = 0$$

$$2 r_2^2 + 5 r_2 - 7 = 0$$

بالجمع نحصل على :

$$2 (r_1^2 + r_2^2) + 5 (r_1 + r_2) - 14 = 0$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 = -\frac{5}{2}(r_1 + r_2) + \frac{14}{2}$$

$$= -\frac{5}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) + 7 = 13\tfrac{1}{2}$$

كما سبق وحصلنا عليه

مثال (١٦) :

أوجد Σr_i^2 , Σr_i^3 حيث $\{ r_i \}$ جذور المعادلة

$$x^3 - 3 x^2 + 3 x - 1 = 0$$

الحل :

من الواضح أن هذه المعادلة من الدرجة الثالثة ولها ثلاثة جذور r_1 , r_2 , r_3 ومن ثم يكون

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{(-3)}{1} = 3$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{3}{1} = 3; \quad r_1 r_2 r_3 = -\frac{(-1)}{1} = 1.$$

والمطلوب الآن هو حساب :

$$\Sigma r_i^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \quad , \quad \Sigma r_i^3 = r_1^3 + r_2^3 + r_3^3$$

ولننظر الآن الى المقدار $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ فيمكننا كتابته فى الصورة :

$$r_1^2 + r_2^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2 (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)$$

$$= 3^2 - 2 (3) = 9 - 6 = 3$$

أما بالنسبة للمقدار Σr_i^3 فسنتبع طريقة اخرى هى كما يلى :

حيث ان « r_i » هو احد جذور المعادلة فهو يحققها وهذا أن :

$$r_i^3 - 3 r_i^2 + 3 r_i - 1 = 0$$

وهذا صحيح لقيم $i = 1, 2, 3$ فلو جمعنا هذه المعادلات (أو أدخلنا $\left(\sum_{i=1}^{3}\right)$ لحصلنا على $\Sigma r_i^3 - 3 \Sigma r_i^2 + 3 \Sigma r_i - \Sigma 1 = 0$

$$\therefore \quad \Sigma r_i^3 - 3 \times 3 + 3 \times 3 - 3 = 0$$

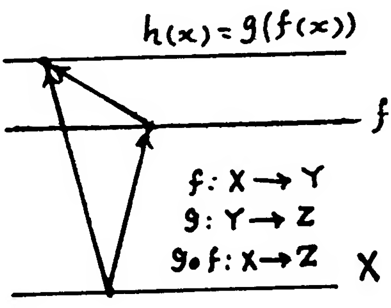
$$\therefore \quad \Sigma r_i^3 = r_1^3 + r_2^3 + r_3^2 = 3.$$

لاحظ أن المعادلة هى $(x - 1)^3 = 0$ والجذور هى $(1, 1, 1)$.

بند ٢ ــ ٨ الدوال العكسية Inverse Functions :

٢ ــ ٨ ــ ١ تعريف دالة الدالة Composite Function :

اذا كانت $f(x)$ دالة المتغير « x » ذات نطاق « D_f » ومدى « R_f » وكانت الدالة $g(x)$ دالة اخرى ذات نطاق « D_g » ومدى « R_g » فان دالة الدالة « h » المعرفة كالدالة $(g_o f)$ وتعرف $h(x) = g(f(x))$. ذات نطاق « D_h » لقيم « x » فى النطاق « D_f » بحيث $f(x) \in D_g$ وتوضيحا اكثر لهذا المفهوم نتبع خطوات الشكل المقابل (شكل ٢ ــ ٨ ــ ١)



شكل ٢ ــ ٨ ــ ١

وسنسوق الآن بعض الأمثلة :

مثال (١) :

اذا كان :

$$g(x) = x^2 \quad , \quad f(x) = (x - 3)$$

اوجد كل من :

$$f(g(x)) \quad , \quad g(f(x))$$

الحل :

$$g(f(x)) = g(x - 3) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 3$$

مثال (٢) :

اذا كان :

$f(g(x)) = 1 - x^2 \,,\, g(x) = 1 - x^2$ اوجد $f(x)$

الحل :

بما أن الدالة $f(g(x)) = 1 - x^2$ $\quad g(x) = 1 - x^2$

اى ان :

$$f : g(x) \longrightarrow g(x)$$

اى ان الدالة « f » تنقل متغيرا ما الى نفسه ومنه نرى ان :

$$f(x) = x.$$

مثال (٣) :

اذا كانت $f(g(x)) = x^2 + 2x + 1 \,,\, f(x) = x^2$

أوجـد $g(x)$

الحل :

$$\therefore f(x) = x^2 \qquad \therefore f(g(x)) = (g(x))^2$$

ومن المعطيات نرى ان :

$$f(g(x)) = (g(x))^2 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

ومنها نجد ان :

$$g(x) = x + 1$$

وعند التعويض عن $g(x)$ بهذه الصورة نجد ان :

$$f(g(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

وهو المعطى من البداية .

٢ ــ ٨ ــ ٢ ــ تعريف الدالة العكسية Inverse Function :

اذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين للمتغير «x» بحيث :

(١) $f(g(x)) = x$ لجميع قيم « x » المنتمية لنطاق (حيز) الدالة « g »

(٢) $g(f(x)) = x$ لجميع قيم « x » المنتمية لنطاق (حيز) الدالة « f »

فان كلا من $f(x)$, $g(x)$ تعتبر دالة عكسية للأخرى .

وسنسوق الآن بعض الأمثلة لتوضيح هذا التعريف .

مثـال (٤) :

تعتبر كل من : $f(x) = \dfrac{12 - 3x}{4}$, $g(x) = \dfrac{12 - 4x}{3}$

دالة عكسية للأخرى وذلك لأن :

$$f(g(x)) = f\left(\frac{12 - 4x}{3}\right) = \frac{12 - 3\left(\frac{12 - 4x}{3}\right)}{4} =$$

$$\frac{12 - 12 + 4x}{4} = x$$

بينما نجد :

$$g(f(x)) = g\left(\frac{12 - 3x}{4}\right) = \frac{12 - 4(12 - 3x)/4}{3} =$$

$$\frac{12 - 12 + 3x}{3} = x.$$

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$

يجدر بنا ان نلاحظ أن هناك دوال ليس لها دوال عكسية ومثال ذلك الدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$. وموضوع امكانية ايجاد الدالة العكسية لدالة ما يدخل ضمن موضوع الدوال ولكن فى دراسات متقدمة فى التحليل الرياضى ليست فى متناولنا هنا .

ويمكننا القول بأن التعريف ٢ ـ ٨ ـ ٢ ـ يقترح علينا عند ايجاد معكوس دالة ما ان نعيد كتابة معادلة الدالة المراد ايجاد معكوسها ونستبدل بالمتغير « x » المتغير « y » وكذلك تكتب « x » بدلا من « y » . ثم نحل المعادلة الناتجة بالنسبة الى« y » . اى نوجد « y » بدلالة « x » .

وسنطبق هذا فيما يلى من أمثلة .

مثال (٥)

اوجد معكوس الدالة $y = 3x - 4$

الحل :

نضع « x » بدلا من « y » وكذلك « y » بدلا من « x » فنحصل على $x = 3y - 4$.

والآن نحل المعادلة الناتجة لايجاد قيمة« y » بدلالة « x » فنحصل بذلك على الدالة العكسية المطلوبة اى أن الدالة العكسية المطلوبة هى :

$$y = \frac{x + 4}{3}$$

ويمكن التأكد من ذلك بوضع

$$g(x) = \frac{x + 4}{3} \quad , \quad f(x) = 3x - 4$$

وللتحقق نجد ان :

$$g(f(x)) = x \quad , \quad f(g(x)) = x$$

مثـــال (٦) :

اوجد الدالة العكسية للدالة $y = \dfrac{2x - 5}{2}$

الحـــل :

نستبدل « x » مكان « y » والعكس فنحصل على :

$$x = \frac{2y - 5}{2} \qquad \therefore \; 2x = 2y - 5$$

$$\therefore \; y = \frac{2x + 5}{2}$$

وهذه هى الدالة العكسية المطلوبة .

مثـــال (٧) :

اوجد الدالة العكسية للدالة : $y = \dfrac{1}{x + 1}$

الحـــل :

باستبدال « x, y » نحصل على : $x = \dfrac{1}{y + 1}$

وبحل هذه المعادلة نحصل على الدالة العكسية المطلوبة وهى :

$$y = \frac{1 - x}{x}$$

وسنتطرق فيما يلى للدوال المثلثية العكسية .

٢ – ٨ – ٣ – الدوال المثلثية العكسية
: Inverse Trignometric Functions

يمكن صياغة التعريف ٢ – ٨ – ٢ للدالة العكسية فى صورة اخرى مستعملين الرمز « f^{-1} » للدلالة على الدالة العكسية للدالة « f » . وتصاغ فى هذه الحالة كما يلى :

اذا كانت « f » دالة – بحيث ان لكل قيمة من « x » توجد قيمة واحدة لـ « y » والعكس صحيح اى لكل قيمة من قيم « y » توجد قيمة واحدة « x » ذات نطاق « Y » ومدى « X » فان معكوسها « f^{-1} » لها النطاق « X » والمدى « Y » وزيادة على ذلك فان :

$$f^{-1}(x) = y \quad \text{if and only if} \quad f(y) = x$$

لجميع قيم $\quad y \in Y \;,\; x \in X$

ومن دراستنا للدوال المثلثية (بند ٢ – ٥) $y = f(x)$ فلقد لاحظنا ان هناك عديد من قيم « x » تقابلها نفس قيمة « y » . وعليه فانه عموما لا يمكننا ايجاد الدوال العكسية لهذه الدالة . ولكن اذا ضيقنا النطاق (الحيز) فانه يمكننا تعريف دوال لها نفس خصائص الدوال المثلثية (على هذا النطاق الاصغر) ويمكننا ايجاد الدوال العكسية لها .

فمثلا اذا اخذنا $y = \sin(x)$ ذات نطاق « R » ، ومدى $[-1, 1]$ فهذه الدالة ليست دالة يكون لها الخاصية ان لكل قيمة من قيم المتغير « y » يكون هناك قيمة وحيدة فقط من قيم « x »

فمثلا عندما تساوى « x » اى من القيم $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

فان y تأخذ نفس القيمة ($\frac{1}{2}$) . على انه يمكننا اختيار فئة جزئية « S » من « R » بحيث انه عندما تتغير « x » خلال « S » فان « y » تأخذ جميع القيم الواقعة بين $[-1, 1]$ مرة واحدة فقط . يمكننا اختيار « S » لكى تكون $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ومن الملاحظ انه باختيار هذا النطاق يمكننا التعبير عن الدالة العكسية لدالة الجيب كما يلى :

١ ـ تعريف معكوس دالة Sine :

الدالة العكسية للدالة (sin) التى ترمز لها بالرمز ($\sin^{-1}$) او (arcsin) نعرف كالتالى :

$$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$$

اذا كان واذا كان فقط

$$x = \sin y.$$

حيث :

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

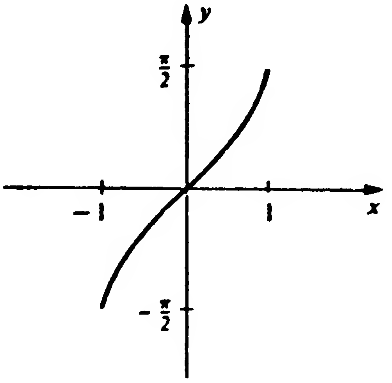
$$-1 < x < 1$$

ويمكن رسم منحنى الدالة

$$y = \sin^{-1} x$$

عن طريق رسم منحنى الدالة

$$x = \sin y$$



$y = \sin^{-1} x$

شكل ٢ ـ ٨ ـ ٢

حيث $-1 < x < 1$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ كما فى الشكل

ومن تعريف الدوال العكسية نجد ان :

$$\sin^{-1} (\sin x) = x \quad (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$$

$$\sin (\sin^{-1} x) = x \quad (x \in [-1, 1])$$

مثال (٨) :

اوجد قيم $(i)\ \sin^{-1} (\frac{\sqrt{2}}{2}); (ii)\ \arcsin (-\frac{1}{2})$

الحل :

اذا فرضنا ان $y = \sin^{-1} (\frac{\sqrt{2}}{2})$ وهذا يعنى انه

$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنهـا نجـد أن $y = \frac{\pi}{4}$ ويجب اختيار

« y » بحيث تقـع فى $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ولذلك فان القيمـــة

$y = \frac{3\pi}{4}$ غير صحيحة .

ومن ثم نجد ان $y = \sin^{-1}(-\frac{1}{2})$ تكون قيمتها $y = -\frac{\pi}{6}$

ويمكن تطبيق نفس الطريقة على الدوال المثلثية الأخرى وذلك باختيار فئة جزئية من فئة النطـاق بحيث تكون الدالة وحيـــدة القيمة لكل من المتغيرين .

(ب) تعريف معكوس الدالة cosine

معكوس دالة cosine ويرمز لها بالرمز $\cos^{-1}$ arccos OR ويعرف كما يلى :

$$\cos^{-1} x = y \quad \text{if and only if} \cos y = x$$

حيث $x \in [-1, 1]$ بينما $y \in [0, \pi]$

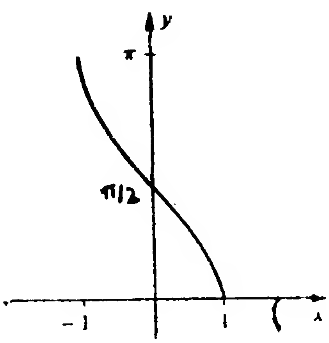
ومن تعريف الدوال العكسية نصل الى أن

$$\cos^{-1}(\cos x) = \arccos(\cos x) = x \quad (x \in [0, \pi])$$

$$\cos(\cos^{-1} x) = \cos(\arccos x) = x \quad (x \in [-1, 1])$$

والشكل المقابل يمثل منحنى دالة
$y = \cos^{-1} x$

وهو شكل ٢ ــ ٨ ــ ٣



$y = \cos^{-1} x$

شكل ٢ ــ ٨ ــ ٣

(جـ) معكوس دالة tan

تعرف هذه الدالة والتى يرمز لها بالرمز $\tan^{-1}$ OR arctan. كما يلى :

$$y = \tan^{-1} x \text{ if and only if } x = \tan y$$

حيث :

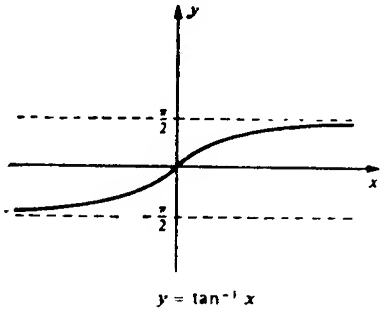
$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$x \in R$

ومنحنى هــــذه الدالة يظهر فى الشكل ٢ ـ ٨ ـ ٤ المقابل ونلاحظ فى هذا الشكل أنه عندما :

$x \longrightarrow \pm\infty$

فان $y \longrightarrow \pm\frac{\pi}{2}$



شكل ٢ ـ ٨ ـ ٤

مثال (١) :

اذا كان $0 \leqslant x \leq 1$ فعبر عن $\cos(\sin^{-1} x)$ كدالة جبرية فى « x »

الحـــل :

نفرض ان $y = \sin^{-1} x$ ينتج انه $x = \sin y$

والمطلوب الآن هــــو التعبير عن $\cos y$ بدلالة « x » وحيث ان

$\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ينتج ان $\cos y > 0$ وعليه نجد أن

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

تبعا لذلك نجد أن :

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in (0, 1]$$

مثال (١٠) :

اذا كان $0 \leqslant x \leq 1$ فعبر عن $\tan(\cos^{-1} x)$ كدالة جبرية فى « x ».

الحـــل :

كما فى المثال السابق نفرض $y = \cos^{-1} x$ فنجد $x = \cos y$

حيث $0 \leqslant y \leq \frac{\pi}{2}$. والمراد الآن التعبير عن tany بدلالة « x » . وحيث ان « y » واقعة فى $[0, \frac{\pi}{2}]$ فيكون $\tan y > 0$ وعليه نجد ان :

$$\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} = \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}}$$

وعليه نجد ان :

$$\tan (\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, 0 < x \leqslant 1$$

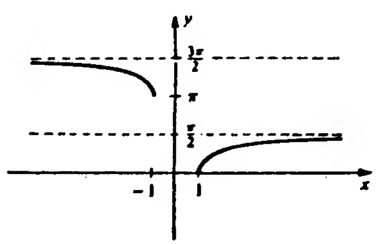
(د) معكوس دالة Sec :

الدالة العكسية للدالة sec والتى يرمز لها بالرمز arcsec OR $\sec^{-1}$ تعرف كما يلى :

$$y = \text{arcsec}\ x = \sec^{-1} x \text{ if and only if } x = \sec y$$

وحيث :

$$y \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi , \frac{3\pi}{2}), \quad x \in (-\infty , 1] \cup [1, \infty)$$



شكل ٢ – ٨ – ٥ منحنى الدالة
$y = \sec^{-1} x$

وشكل منحنى هذه الدالة واضح فى الرسم البيانى المقابل شكل (٢ – ٨ – ٥) .

لاحظ ان المدى مثقوب وكذلك الحيز (النطاق) مثقوب ايضا .

مثال (١١) :

اذا كان $|x| \geqslant 1$ فعبر عن $\tan (\sec^{-1} x)$ كدالة جبرية فى « x » .

الحـل :

نفرض $y = \sec^{-1} x$ فنجـد $x = \sec y$ والمطلوب هو التعبير عن $\tan y$ بدلالة « x » . فمن تعريف $\sec^{-1}$ اما أن يكون $0 \leqslant y < \frac{\pi}{2}$ او $\pi \leqslant y < \frac{3\pi}{2}$ وفى اى من هاتين الفترتين فان $\tan y \geqslant 0$

ومن ثم نجد أن :

$$\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

وعليه نجد أن :

$$\tan (\sec^{-1} x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

تمـارين

١ ــ اذا كانت $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$

اكتب عناصر كل من الفئتين $A \times B$, $B \times A$.

٢ ــ اذا كانت $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$

كون جميع العلاقات الممكن تكوينها من الفئة « A » الى الفئة « B »

٣ ــ كون بعض عناصر العلاقات التالية وذلك بحل المعـــادلات المعرفة لكل من العلاقات الآتية :

(i) $\{ (b, x) : x^2 + b x = 0 \}$

(ii) $\{ (x, y) : x^2 + y^2 = 1 \}$

٤ ــ اثبت أن الفئات زوجية الترتيب التالية عبـارة عن علاقات على الفئة الموضحة امام كل منهم :

1) $\{ (2, 7), (5, 7), (2, 5) \}$ on $\{ 2, 5, 7 \}$

2) $\{ (5, 2), (7, 2), (5, 7) \}$ on $\{ 2, 5, 7 \}$

3) $\{ (7, 5), (7, 2), (2, 5) \}$ on $\{ 2, 5, 7 \}$

4) $\{ (5, 7), (7, 2), (2, 5) \}$ on $\{ 2, 5, 7 \}$

5) $\{ (5, 7), (2, 7) \}$ on $\{ 2, 5, 7 \}$

٥ ــ اذا كانت $f(x) = x^2 - x + 1$ اوجد كل من :

1) $f(0)$, 2) $f(2)$, 3) $f(-1)$

4) $f(1)$ 5) $f(3)$, 6) $f(-3)$

7) $f(a^2)$ 8) $f(-a^2)$ 9) $f(a + 1)$

10) $f(a - 1)$ 11) $f(1 - a)$ 12) $f(-a - 1)$.

13) $f(4)$ 14) $f(-2)$ 15) $f(5)$

16) $f(-5)$.

٦ ــ اذا كانت $f(x) = x + 3$, $g(x) = x - 3$
وجد كل من :

1) $g(0)$
2) $3f(0)$
3) $f(3) + g(3)$.
4) $f(1) - g(1)$
5) $4g(0)$
6) $f(2) . g(3)$

٧ ــ أوجد كل من نطاق (حيز) Domain ومدى (Range)
لدوال التالية علما بأن . $(x, y \in R)$

1) $f ; x \longrightarrow \sqrt{x}$
2) $g : x \longrightarrow |x|$
2) $h(x) = x^2$
4) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$
5) $k : x \longrightarrow \sqrt{x^3 - 1}$
6) $j : x \longrightarrow \dfrac{x}{1 - x}$

٨ ــ اى من الفئات التالية تعبر عن دالة من الفئة $A = \{1, 2, 3, 4\}$
الى الفئة $B = \{a, b, c, d, e\}$ ثم أوجـــد نطاق ومدى الدوال التى
تستنتجها .

1) $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, d), (4, e)\}$
2) $f_2 = \{(2, a), 3, a), (1, a), (4, a)\}$
3) $f_3 = \{(1, a), (4, d), (3, a), (2, b), (1, d), (4, a)\}$
4) $f_4 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, 4), (4, e)\}$

٩ ــ اى من الفئات التالية تعتبر وصف لدالة ؟ فاذا كانت دالة
فأوجد نطاقها ومداها ، أما اذا كانت الفئة لا تصف دالة فاذكر السبب .

1) $f_1 = \{(x, y) : y = x\}$.
2) $f_2 = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$.
3) $f_3 = \{(x, y) : x - y = 2\}$.
4) $f_4 = \{(x, y) : y = 1\}$.
5) $f_5 = \{(x, y) : x \leqslant y\}$.

6) $f_6 = \{ (x, y) : |x| + |y| = 1 \}$.

7) $f_7 = \{ (x, y) : y = \sqrt{1 - x^2} \}$.

8) $f_8 = \{ (x, y) : y - |x - 1| = 2 \}$.

9) $f_9 = \{ (x, y) : y = [x] \}$.

حيث [x] هو اكبر عدد صحيح أقل من قيمة « x » .

10) $f_{10} = \{ (x, y) : y = x - [x] \}$.

١٠ ـ مثل بيانيا موضحا مقياس الرسم فى كل حالة ثم أوجـــد أصفار المعادلات

1) $y = 2x + 5$

2) $y = \dfrac{x^2}{16}$

3) $y = x^2 - 7x + 10$

4) $y = |x|$

5) $y = |x - 4|$

6) $y = |4 - x|$

7) $y = |x + 4|$

8) $y = |x^2 + 4|$

9) $y = -4 + x^2$

10) $y = x^2 + 4$

11) $y = -x^2 - x + 30$

12) $y = |2x - 3|$

13) $y = x^3$

14) $y = \sqrt{x} - 1$

١١ ـ مثل بيانيا الدوال المثلثية (الدائرية) التالية :

1) $\sin 3x$

2) $\sin(-2x)$

3) $\sin \dfrac{3x}{4}$

4) $\sin(-4x)$

5) $\sin\left(-\dfrac{x}{3}\right)$

6) $2 \sin\left(-\dfrac{5x}{4}\right)$

7) $-\frac{1}{2} \sin(4x)$

8) $\sin\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$

9) $\cos(-x)$

10) $\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$

11) $\cos\frac{3x}{4}$

12) $\cos(\pi x)$

13) $\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{x}{4}\right)$

14) $2\cos\left(\frac{-6x}{5}\right)$

15) $2\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$

16) $\cos\left(\frac{2x}{\pi}\right)$

17) $\tan(2x)$

18) $\tan\frac{x}{2}$

19) $\frac{1}{2}\tan 2x$

20) $\tan\frac{x}{\pi}$

١٢ ـ أوجد نطاق (حيز) ومدى كل من الدوال المعطاه فى التمرين السابق .

١٣ ـ بين أى من الدوال الآتية فردية واى منها زوجية .

a) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

b) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

c) $f(x) = (2 - x)^2 - (2 + x)^2$

d) $f(x) = (2 - x)^3 - (2 + x)^3$.

e) $f(x) = \cos(4x) + \frac{1}{\cos 4x}$

g) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 4x}{x^2 + 4}$

h) $f(x) = \tan 3x + \sin 4x \cos 4x$

i) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{4x + x^3}$

١٤ ـ اوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (2, 5) وميله « 3 » .

١٥ ـ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين (1, 2) , (3, 7) .

١٦ ـ اوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (2, 3) ويمر بنقطة تقاطع الخطين المستقيمين

$$x + y = 8 \, , \, 4x - y = 7$$

١٧ ـ اوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع الخطين $3x + y = 1 \, , \, 4x - y = 6$ ويوازى الخط المستقيم $3x + 4y + 5 = 0$

١٨ ـ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع الخطين $2x + 3y = -5 \, , \, 3x + 2y = 0$ وعمودى على الخط المستقيم $5x + 4y + 2 = 0$.

١٩ ـ اوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل (0, 0) وعمودى على الخط المستقيم $3x + 5y - 7 = 0$

٢٠ ـ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع الخطين $x - 1 = 0$ ، $y - 5 =$ وعمودى على الخط $2x - 3y - 8 = 0$

٢١ ـ أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على الخط $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$ ويمر بالنقطة (−3, −2) .

٢٢ ـ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى طول العمود الساقط عليه من نقطة الاصل (0, 0) هو « 7 » وحدات والزاوية التى يصنعها العمود مع الاتجاه الموجب لمحور « x » هى «θ» $(\tan \theta = \frac{3}{4})$ ثم أوجد نقطة تقاطعه مع الخط المستقيم $2x + 5y = 35$.

٢٣ ـ اوجد معادلة الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع زوج الخطوط المستقيمة $3x + 2y = 7$ ، $x + y = 3$ وزوج الخطوط المستقيمة $5x - 2y = 5$, $x + y = 8$

٢٤ ـ اثبت ان النقاط الثلاثة الآتية تكون مثلث قائم الزاوية $(6, -1), (2, 3), (-4, -3)$

٢٥ ـ استخدم نظرية الباقى والقسمة التركيبية فى معرفة هل كل مقدار عامل من عوامل الدالة المقابلة ؟

1) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 4x - 2 , (x - 1)$

2) $f(x) = x^4 + 1 , (x + 1)$

3) $f(x) = x^3 + 27x + 28 , (x + 1)$

4) $f(x) = x^4 - x^2 + 1 , (2x + 1)$

5) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 3x - 38 , (x + 2)$

6) $g(x) = 16x^2 - 4x^2 + 2x - 1 , (2x - 1)$

٢٦ ـ حلل الدوال الآتية الى عواملها الأولية :

1) $x^4 + 2x^2 + 1$

2) $x^3 - 1$

3) $x^4 - 1$

4) $x^2 + x + 1$

٢٧ ـ أوجد $\Sigma r_i^2 , \Sigma r_i^3$ حيث $\{ r_i \}$ هى فئة جذور المعادلات الآتية :

1) $x^2 + 2x + 1 = 0$

3) $x^3 - 1 = 0$

5) $x^2 + x + 1 = 0$

7) $x^4 - 1 = 0$

2) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

4) $x^3 + 1 = 0$

6) $x^2 - x - 1 = 0$

8) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0.$

٢٨ ــ (أ) اذا كانت $g(x) = x, f(g(x)) = 1 - x^2$
فأوجد $f(x)$.

(ب) اذا كانت $f(x) = 1 - x, f(g(x)) = x^2$ فأوجد
$g(x)$

(جـ) اذا كانت $g(x) = (1 - x^2), f(x) = \sin x$
فأوجد $g(f(x)), f(g(x))$

(د) اذا كانت $g(x) = 1 + x^2, f(x) = \tan x$
فاثبت أن $g(f(x)) = \sec^2 x$. واوجد $f(g(x))$

٢٩ ــ أوجد معكوس الدوال الآتية وهل الناتج دالة أو لا ؟ واذكر الأسباب وفى حالة كونها دالة اذكر النطاق والمدى .

1) $y = x^2$

2) $y = 2x^2 + 5x - 1$

3) $y = \dfrac{5x + 7}{9}$

4) $y = 3x - 4$

5) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

6) $y = \sqrt{x - 1}$

٣٠ ــ اوجد المقادير الآتية :

1) $\sin^{-1}(1/2)$

2) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$

3) $\sin^{-1}(0)$

4) $\arccos(0)$

5) $\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\cos^{-1}(1/2)$

7) $\tan^{-1}(-1)$

8) $\arctan(-\sqrt{3})$

9) $\tan^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

10) $\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

٣١ ــ اوجد قيمة المقادير الآتية :

1) $\sin\left(\cos^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) $\cos(\sin^{-1}(0))$

3) $\tan(\tan^{-1} 10)$

4) $\arcsin(\sin 5)$

5) $\tan^{-1}(\cos 0)$

6) $\sin(\arccos \frac{3}{5})$

7) $\cos(\sin^{-1} \frac{3}{5} + \tan^{-1} \frac{4}{3})$

8) $\sin(\sin^{-1} \frac{1}{2} + \arccos 0)$

9) $\tan(\arctan \frac{3}{4} + \arccos \frac{3}{5})$

10) $\cos(2 \sin^{-1} \frac{8}{17})$

11) $\sin(2 \arccos (\frac{-4}{5}))$

12) $\sin(\arctan \frac{1}{2} + \arccos \frac{4}{5})$

13) $\cos(\arctan 2 - \arcsin \frac{3}{5})$

14) $\sin(\arccos \frac{3}{5} - \arctan 2)$

15) $\sin(\arctan 1 - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}})$

٣٢ ــ اكتب الدوال الآتية كدوال جبرية في « x » .

1) $\sin(\tan^{-1} x)$

2) $\tan(\cos^{-1} x)$

3) $\cos(\frac{1}{2} \cos^{-1} x)$

4) $\cos(2 \tan^{-1} x)$

5) $\tan(2 \cos^{-1} x)$

6) $\cot(2 \sin^{-1} \frac{x}{2})$.

٣٢ ـ اثبت مايلى :

1) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

2) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

3) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (x \neq 0)$

4) $\arcsin 2x / (1 + x^2) = 2 \arctan x \, , \ |x| \leqslant 1$

٣٤ ـ عرف دالة $\csc^{-1}$ مع تضييق النطاق الى $(0, \pi)$

٣٥ ـ عرف دالة $\cot^{-1}$ مـع تضـيـيق النطـــاق الى
$(0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

٣٦ ـ ارسم منحنيات المعادلات الآتية :

1) $y = \sin^{-1} 2x$ 2) $y = \frac{1}{2} \tan^{-1} x$

3) $y = 2 \sin^{-1} x$ 4) $y = \tan^{-1} \frac{1}{2} x$

5) $y = 2 + \sin^{-1}(x + 4)$ 6) $y = 1 + \tan^{-1}(x - a)$

٣٧ ـ فى التمرين السابق بين اين تقع جذور المعادلات $y=0$ ؟

الباب الثالث

النهـايات

بند ٣ ـ ١ ـ مقـدمة :

ان مفهوم النهايات هو احد الأفكار الأساسية التى تميز حساب التفاضل والتكامل عن غيره من فروع الرياضيات الأخرى مثل الهندسة والجبر . وحيث ان هذا المبدا هو المدخل الرئيسى للتفاضل والتكامل فنحاول ها هنا ان نبسط افكاره الأساسية ونعتنى بتفسيرها وتوضيحها حتى ترسخ فى الأذهان .

نهتم فى كثير من الأحيان بقيم الدالة $f(x)$ **عندما نقترب** « x » من القيمة « a » ولكن ليست مساوية لها . وفى بعض الأحيان قد لاتكون النقطة $x = a$ احدى نقط نطاق الدالة . ويكون السؤال المطروح هو « هل **تقترب** قيمة الدالة $f(x)$ من مقدار معين (L) كلما **اقتربت** « x » من a ? » فاذا كان الجواب ايجابا فاننا نقول ان نهاية $f(x)$ تساوى (L) عندما تتقارب « x » الى « a » ونرمز لهذا بالرمز

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ولتوضيح ذلك لنفترض ان عالم فيزيقى يرغب فى قياس كمية معينة عندما يكون ضغط الهواء مساويا للصفر . وحيث انه من المستحيل (تكنولوجيا) أن نصل الى حالة الفراغ التام ، فان الطريق الطبيعى هو أن تقيس هذه الكمية عندما يتضاءل الضغط . اى عندما يقترب الضغط من الصفر ، فاذا كانت تلك القياسات تقترب من قيمة ما ولتكن « L » مثلا فانه يمكننا القول بأن مقدار القياس هو « L » فى حالة الفراغ . فاذا رمزنا للضغط بالرمز « x » والكمية المقاسة بالدالة $f(x)$ كدالة فى الضغط . فان قيمة القياس عند الفراغ هى

$$\lim_{x \to o} f(x) = L.$$

وهى عملية نهاية ونلاحظ ها هنا ان قيمة الضغط لم تساوى صفر ولكنها كانت عند قيم قريبة من الصفر .

ولنضرب الآن هذا المثال التمهيدى :

اذا اعتبرنا الدالة $f(x) = 3x - 4$ ونود أن ندرس قيمها عندما تقترب قيمة المتغير المستقل « x » من العدد ٣ لذلك نرسم جدولا ونجعل قيم « x » قريبة من العدد ٣ ونحسب قيمة $f(x)$ عند هذه الأعداد . وذلك كما فى الجدول الآتى :

x	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
$f(x) = 3x - 4$	4.7	4.97	4.997	5.003	5.03	5.3

فمن الواضح ان قيمة الدالة $f(x)$ **تقترب** من العدد خمسة كلما **اقتربت** قيمة « x » من ثلاثة وبهذا نستطيع القول أن نهاية (limit) الدالة $f(x)$ تساوى خمسة عندما تؤول (x) الى العدد ثلاثة . وترمز لهذا المعنى بالرمز .

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

ونلاحظ هنا أن تقارب قيمة الدالة $f(x) = 3x - 4$ من العدد خمسة يعتمد على تقارب « x » من العدد ثلاثة . فلما كان $2.99 < x < 3.01$ رأينا أن :

$$4.97 < f(x) < 5.03$$

وباستخدام القيمة المطلقة نستطيع اعادة كتابة المتباينات السابقة فى الصور

$$|(3x - 4) - 5| < .03 \quad \text{IF} \quad |x - 3| < .01$$

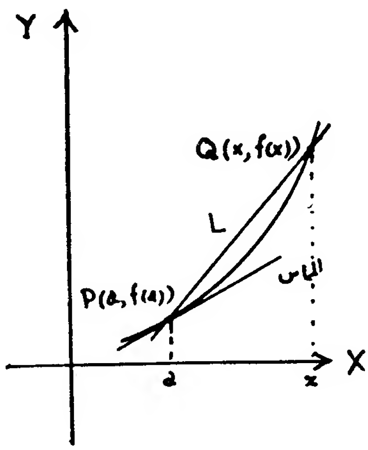
$$|(3x - 4) - 5| < .003 \quad \text{IF} \quad |x - 3| < .001$$

وهذا يعنى انه اذا كانت « x » قريبة من العدد ثلاثة بمقدار (0.01) وحدة قياسية فان $f(x)$ تكون قريبة من العدد خمسة بمقدرا (0,03) وحدة قياسية .

اما اذا كانت « x » قريبة من العـــدد ثلاثة بمقدار (.001)
فان (4 — 3 x) تكون قريبة من االعــدد خمســـــة بمقــدار (0.003)
وحدة قياسية .

سنتعرض التعريف الدقيق للنهاية فيما بعد ولكن هنا نود أن نلاحظ أنه بامكاننا جعل قيمة الدالة f (x) تختلف فى القيمة عن العدد حمسة بمقدار صغير جدا حسب اختيـــارنا (أو بالأحرى حسب درجة الدقة التى نريدها) وذلك اذا جعلنا «x » تقترب قربا كافيا من العدد ثلاثة . لاحظ أننا قد استخدمنا كلمات تعوزها الدقة مثل تقترب أو تقترب قربا كافيا . ستستغنى عن هذه الكلمات غير الدقيقة حينمـــا نعطى التعريف الدقيق للنهايات بعد قليل .

وسنعطى الآن المثال التالى من الهندسة لتقريب المفهوم الى الأذهان



شكل ٣ ــ ١ ــ ١

يمكن لخط مستقيم « L » أن يقطع منحنى الدالــــة y = f (x) فى نقطتـــين . لتكـــن هاتان النقطتان همـــا P (a, f (a)) , Q (x, f (x)) ,
وميل هـــذا المستقيم يعطى من

$$m_{pq} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

وكلمـــا اقتربت النقطـــة « Q » من النقطـــة « P » اقترب الخط القـــاطع P Q من المماس للمنحنى عند النقطة « P »وفى النهاية عندما تنطبق النقطة « Q » على النقطة « P » فان المستقيم « L » يصير مماسا للمنحنى عند النقطة « P » كما فى الشكل ٣ ــ ١ ــ ١ . ويصير ميل هذا المستقيم فى هذه الحالة هو ميل المماس « m » أى ان :

$$m = \lim_{Q \to P} m_{pq} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

اذا أردنا الآن أن نحصل على ميل المماس للمنحنى $y = x^3$
عند النقطة $P(2, 8)$ (أى عند $x = 2$) فاننا ندرس تغيرات الدالة

$$m_{pq} = \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

فعند كتابة الجدول عندما تقترب « x » من العدد اثنين نحصل على :

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$\frac{x^3 - 8}{x - 3}$	11.41	11.94	11.994	12.006	12.06	12.61

ومن الواضح انه كلما اقتربت « x » من العدد ٢ كلما اقتربت m_{pq} من العدد (١٢) أى أن ميل المماس عند النقطة المعينة هو (١٢) .

فاذا كانت $1.9 < x < 2.1$ فان $11.41 < f(x) < 12.61$

وهذا يعنى $|x - 2| < 0.1$ فان $|f(x) - 12| < 0.7$

اما اذا كانت $|x - 2| < 0.01$ فان $|f(x) - 12| < 0.06$

بينما اذا كانت $|x - 2| < .001$ فان $|f(x) - 12| < 0.006$

ولذا فاننا نستطيع القول أن :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$$

ونلاحظ هنا أن الدالة $\frac{x^3 - 8}{x - 2}$ غير معرفة عندما $x = 2$.

وعموما اذا اقتربت قيمة « x » شيئا فشيئا من المقدار الثابت « a » . وكانت $f(x)$ تقترب هى الأخرى شيئا فشيئا من مقدار ثابت « A » تبعا لهذا التقارب ، بحيث انه يمكننا جعل القيمة العددية للفرق بين $A, f(x)$ صغيرا جدا كيفما نشاء وذلك باختيار قيمة « x »

قريبة قربا كافيا من العدد « a » لجميع قيم « x ». المنتمية لنطاق الدالة f (x) (عدا القيمة « a » فى بعض الأحيان) فاننا نستطيع القول عندئذ ان نهاية الدالة (limit f (x) تساوى « A » عندما تؤول « x » الى « a » وترمز لذلك بالرمز

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

ملاحظة :

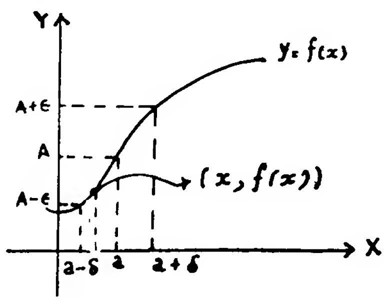
من المهم ان تلاحظ ان قيمة f (x) عندما x = a (ان وجدت) ليست من الضرورى أن تساوى قيمتها النهائية عندما $x \to a$ أى انه ليس من الضرورى ان $\lim_{x \to a} f(x)$ تساوى f (a) .

من هنا ننطلق الى التعريف الدقيق لنهاية دالة ما .

٣ – ١ – ١ – تعريف نهاية الدالة Limit of a Function :

يقال ان للدالة f (x) نهاية تساوى « A » عندما تقترب « x » من العدد « a » أى ان $\lim_{x\to a} f(x) = A$ اذا كان لكل عدد صغير موجب $\delta > 0$ يمكن ايجاد عدد آخر صغير موجب $\varepsilon > 0$ (يعتمد على δ) بحيث اذا كانت $0 < |x - a| < \delta$ يكون لدينا .

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (\text{حيث } x \in D_f)$$



شكل ٣ – ١ – ٢

والتعريف السابق ينطبق تماما مع ماسبق ذكره فى الأمثلة التوضيحية السابقة لمفهوم النهايات . حيث انه فى مثال الدالة الممثلة بالمعادلة $f(x) = 3x - 4$ تكون قيمة $\delta = 0.01$ عندما تكون قيمة $\varepsilon = 0.03$ وكذلك تكون قيمة $\delta = .001$ عندما تكون قيمة $\varepsilon = 0.003$.

ومن هنا يمكننا ملاحظة العلاقة بين كل من ε , δ حيث انه من المعقول جدا فى هذا المثال ان تكون $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ وذلك لان :

$$(3x - 4) - 5| = |3x - 9| = 3|x - 3| < \varepsilon$$

$$\therefore \ |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta .$$

والمقادير ε, δ والقيم $f(x), f(a), x, a$ موضحة عموما فى الشـــكل السابق شكل (٣ ـ ١ ـ ٢) .

مثال (١) :

اوجد النهاية $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ وكذلك اوجد كل من δ, ε

الحـــل :

اذا كانت $x \neq 2$ فان :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

(لماذا $x \neq 2$?) . فاذا **أخذت** « x » قيما قريبة من العدد ٢ بحيث لايساويها تكون قيمة المقدار $x + 2$ عندئذ قريبة من العـــدد ٤ ولاثبات أن :

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ نتبع التعريف ٣ ـ ١ ـ ١

نختار عدد صغير موجب $\varepsilon > 0$ وعلينا ان نجد عدد صغير موجب $\delta > 0$ (يعتمد على ε) بحيث اذا كانت .

$0 < |x - 2| < \delta$ يكون $\left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right) - 4| < \varepsilon$

ويتم ايجاد العلاقة بين δ, ε حسب الخطوات المنطقية التالية :

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| = |x + 2 - 4| = |x - 2| < \varepsilon$$

ولذلك فانه يمكننا اخذ $\delta = \varepsilon$.

لاحظ هنا ان $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

بينمـــا $f(2) = \frac{0}{0}$ وهى من الكميات غير المعينة وهـذا ينطبق مع ما لاحظناه من قبل .

بند ٣ ـ ٢ النهايات اليمنى واليسرى Right-and left-hand limits :

نلاحظ عندما اعطينا التعريف ٣ ــ ١ ــ ١ أننا لم نضع اى شرط عن كيفية اقتراب المتغير المســتقل « x » من العدد « a » الا أنه فى بعض الأحيان نجد أنه من المهم الأخذ فى الاعتبار كيفية اقتراب « x » من العدد « a » .

فاذا اعتبرنا أن كل من a , x عبـــارة عن عــددين حقيقيين على محور « X » حيث « a » عبـــارة عن مقــدار ثابت ، « x » عبارة عن قيمة متغيرة فاننا عندئذ نستطيع القول أن « x » تقترب من العــــدد « a » من الناحية اليمنى او من الناحية اليسرى حيث يمكن التعبير عن هذا بالرمز

$(x \to a - 0 \text{ OR } x \to a-)$, $(x \to a + 0 \text{ OR } x \to a+)$

على الترتيب .

$\lim_{x \to a+} f(x) = A_1 \qquad \text{for } a < x < a + \delta$

$\lim_{x \to a-} f(x) = A_2 \qquad \text{for } a - \delta < x < a$

تسمى عندئذ « A_1 » بالنهاية اليمنى (Right limit) , « A_2 » بالنهـــاية اليسرى (left limit) للدالة f (x) عند العدد « a » على الترتيب .

واذا دققنا النظر فى تعريف النهايات السابق لدراسة نهاية الدالة f (x) عندما تؤول « x » الى « a+ » أو عنـــدما تؤول « x » الى « a- » نجد أنهما متساويتان وكل منهما يساوى نهاية الدالة عندما تؤول « x » الى العدد « a » . ومن هذا ينتج ان :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = A \quad , \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = A$$

والعكس صحيح .

نظرية :

ان كان للدالة $f(x)$ نهاية « A » عندما تقترب « x » من العدد « a » فان هذه النهاية يجب ان تكون وحيدة القيمة . اى ذات قيمة واحدة فقط (Uniqe value) اى انه اذا كانت :

$$1) \quad \lim_{x \to a} f(x) = A_1 \qquad 2) \quad \lim_{x \to a} f(x) = A_2$$

فانه يجب ان يكون $A_1 = A = A_2$

البرهان :

نفرض ان : $1) \quad \lim_{x \to a} f(x) = A_1 \quad ,$

$$2) \quad \lim_{x \to a} f(x) = A_2$$

حيث $A_1 \neq A_2$ اى ان $|A_1 - A_2| > 0$. ونفرض ان

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} | A_1 - A_2 |$$

نطبق الآن تعريف النهايات (٣ — ١ — ١) على كل من (١) ، (٢) فنحصل على

$$| f(x) - A_1 | < \varepsilon_1 \quad , \quad | f(x) - A_2 | < \varepsilon_2$$

حيث كل من $\varepsilon_1 , \varepsilon_2$ اقل من « ε » . ولكن

$$| A_1 - A_2 | = | (A_1 - (f(x)) + (f(x) - A_2) |$$

وباستخدام قواعد القيمة المطلقة نجد أن :

$$| A_1 - A_2 | \leqslant | A_1 - f(x) | + | f(x) - A_2 | \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$< 2\varepsilon = | A_1 - A_2 |$$

وحيث ان $A_1 \neq A_2$ فان هذا يؤدى الى تناقض ، ولذا فلابد أن :

$A_1 = A_2$. هـ . ط . ث .

مثال (١) :

اذا كانت $f(x) = [x]$ اى دالة اكبر عدد صحيح فى العـــدد « x » فادرس نهاية هذه الدالة عندما تؤول « x » الى « a »

الحـــل :

اذا كانت « a » اى عدد غير صحيح . فيكون واقعا بين عددين صحيحين هما $n , n + 1$ مثلا اى ان $n < a < n + 1$ وفى هـــذه الحالة فان :

$$f(a) = n$$

ومهما كانت « x » قريبة من « a » وطالما ان $n < x < n + 1$ فان $f(x) = n$ وعليه نجد ان:

$$\lim_{x \to a} f(x) = n$$

أما اذا كانت « a » عدد صحيح وليكن « N » مثلا . فاننا نجـــد التالى مثلا :

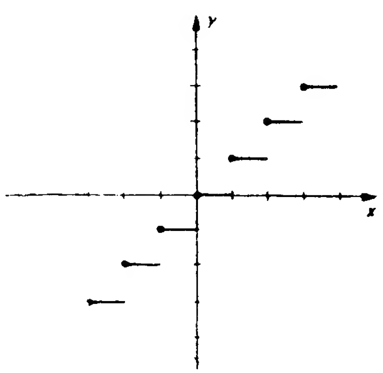
$$f(N + .001) = N \quad , \quad f(N - .001) = N - 1$$

$$\therefore \lim_{x \to N+} f(x) = N \quad , \quad \lim_{x \to N-} f(x) = N - 1.$$

وعليه نجد انه عند اى عـــدد صحيح فان $\lim_{x \to N} f(x)$ لايمكن ايجادها مطلقا

ويمكن ملاحظة ذلك من منحنى هذه الدالة $y = [x]$

وصوره هذا المنحنى تظهر فى الشكل المقابل شكل (٣ ـ ٢ ـ ١)



شكل ٣ ـ ٢ ـ ١ منحنى الدالة
$y = [x]$

بند ٣ ـ ٣ ـ ما لا نهاية Infinity :

هناك تعميمان لأنواع النهاية المعرفة فى التعريف ٣ ـ ١ ـ ١ والآن نود دراسة احد هذه التعميمات. لتعتبر الدالة $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

ومن الجدول التالى نلاحظ :

x	2.5	2.9	2.99	3.01	3.1	3.5
$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$	4.0	100	10000	10000	100	4.0

اى انه يمكننا جعل قيمة الدالة $f(x)$ كبيرة جدا حسب مانريد من الكبر ، وذلك اذا اخترنا قيمة (x) قريبة من العدد (3) فاذا كانت $2.5 < x < 3.5$

اى عندما $|x-3| < 0.5$ فان $f(x) > 4$

اما اذا كانت $|x-3| < 0.1$ فان $f(x) > 100.$

أما اذا كانت $|x-3| < 0.01$ فان $f(x) > 10000$

ومن هذا نستطيع التعميم التالى الذى اوضحنا حالة خاصة منه وهو :

اذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ اكبر من اى عدد كبير موجب لجميع قيم « x » القريبة من العدد « a » (ولكن $x \neq a$) فان قيمة $f(x)$ تصبح ما لا نهاية فى الاتجاه الموجب كلما تقترب قيمة « x » من العدد « a » ونرمز لهذا المعنى بالرمز $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

لذا عند اعتبار الدالة $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ السابقة الذكر يكون

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$$

حيث يقرأ الرمز ∞ ما لا نهاية . وهذا االرمز لا يعبر عن عدد من الاعداد المعروفة ولكن يعنى كمية كبيرة جدا اكبر من اى كمية يمكن تصورها

وعلى النمط السابق للتعريف ٣ ـ ١ ـ ١ الخاص بالنهايات نعتبر الآن تعريفا آخر فى حالة مالا نهاية .

٣ ـ ٣ ـ ١ تعريف :

تصبح نهاية االدالة $f(x)$ مالا نهـية عندما تؤول « x » االى العدد « a » اى ان :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

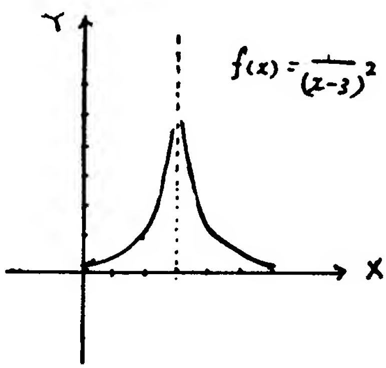
وذلك لأى عدد كبير موجب « N » يوجد عدد آخر صغير جدا « δ » (تعتمد على N) بحيث اذا كانت $0 < |x - a| < \delta$ فان $f(x) > N.$

مثـــال (١) :

اذا كانت $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ فبامكاننا اختيـــــــار « δ » بحيث $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ ومنه اذا كانت $0 < |x - 3| < \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ يكون لدينـــا

$$|x - 3|^2 < \frac{1}{\sqrt{N^2}} = \frac{1}{N}$$

وبهذا تصبح نهاية الدالة $f(x)$ عبارة عن مالا نهاية فى الاتجاه الموجب كما هو واضح فى الشكل المقابل



شكل ٣ ـ ٣ ـ ١

اما الان فنود استعراض التعميم الثانى للتعريف ٣ـ١ـ١

والجدول التالى يوضـــــح قيم الدالة $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ المناظرة لقيم « x » الكبيرة ، حيث نلاحظ انه بوسعنا أن نجعل قيمة الدالة المذكورة تختلف عن الصفر بمقدار ضئيل جدا .

x	5	10	100	10000
$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$	0.25	0.02	.0001	.000001

فاذا كانت

$x > 5$ فان $|(1/(x-3)^2) - 0| < 0.25$

أما اذا كانت

$x > 10$ فان $|(1/(x-3)^2) - 0| < 0.02$

وهكذا حتى عندما

$x > 1000$ فان $|(1/(x-3)^2) - 0| < .000001.$

وعموما اذا أمكن جعل الفرق العـــددى بين f (x) وعـــدد ثابت « A » صغيرا جدا حسب مانختاره وذلك لقيم « x » التى تكبر عن عدد كبير وليكن « N » فنقول فى هذه الحالة أن نهاية f (x) تســـاوى « A » عندما تؤول « x » الى مالا نهاية فى الاتجاه الموجب وتكتب :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

ولهذا فان نهاية الدالة المعرفة فى المثال السابق تساوى الصفر عندما تؤول « x » الى مالا نهاية فى الاتجاه الموجب أى أن :

$$\lim_{x \to \infty} 1/(x-3)^2 = 0.$$

ولوضع مفهوم الفقرات السابقة فى اطار رياضى سليم نذكر التعريف التالى :

٣ ـ ٣ ـ ٢ تعريف :

يقال ان نهاية الدالة $f(x)$ تساوى « A » عندما تؤول « x » الى مالا نهاية . اى ان $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ وذلك اذا أمكن ايجاد عدد كبير جدا « N » لكل عدد صغير جدا مختار « ε » (بحيث « N » تعتمد على « ε ») بحيث ان :

لقيم $x > N$ فان $|f(x) - A| < \varepsilon$

مثــال (٢) :

اذا كانت $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ فان $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

فهنا يمكن اختيار $N = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ لجميع قيم « x » بحيث ان :

$$|x - 3| > N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\therefore \left| \left(\frac{1}{x-3}\right)^2 - 0 \right| < \frac{1}{N^2} = \varepsilon$$

مثــال (٣) :

أوجد النهاية

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{x - 3}$$

الحـــل :

بالرغم انه فى استطاعتنا استنتاج نهاية هذه الدالة بالتعويض عن قيم « x » بأعـــداد كبيرة مثل $x = 10, 100, 1000, \ldots$, الا أنه من الممكن تبسيط هذه الفكرة بقسمة كل من البسط والمقام على أكبر قوة للمتغير « x » أى :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3} = \frac{2(x/x) + (1/x)}{(x/x) - (8/x)} = \frac{2 + (1/x)}{1 - (3/x)}$$

وهذا صحيح لقيم « x » بحيث : $x \neq 0 , \quad x \neq 3$

ومن هنا نلاحظ انه عندما تصبح قيمة « x » كبيرة جدا يمكننا جعل قيمة $f(x)$ تختلف عن العدد ٢ بمقدار ضئيل جدا حسبما نشاء . اى ان :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2.$$

مثال (٤) :

أوجد النهاية

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x^3 + 2x^2 - x - 5}{5x^3 - 4x^2 - 3x - 9}\right]$$

الحل :

اذا عوضنا بالقيمة ∞ فى الكسر نحصل على $\frac{\infty}{\infty}$ وهى كمية غير معينة . لذلك نقسم كلا من البسط والمقام على اكبر قوة للمتغير « x » وهى « x^3 » فى هذه الحالة فنحصل على :

$$\lim_{x \to} \frac{3x^3 + 2x^2 - x - 5}{5x^3 - 4x^2 - 3x - 9}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{5(x^3/x^3) - \frac{4x^2}{x^3} - 3\frac{x}{x^3} - \frac{9}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3 + (2/x) - (1/x^2) - (5/x^3)}{5 - (4/x) - (3/x^2) - (9/x^3)} = \frac{3}{5}$$

مثـال (٥) :

اثبت أن :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n}{n^2} = \tfrac{1}{2}$$

الحـل :

البسط عبارة عن متوالية عددية حدها الأول (1) والأخير (n) وعدد حدودها (n) فيكون مجموعها هو $\tfrac{1}{2} n (n + 1)$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} (\ldots) = \lim_{n \to \infty} \frac{\tfrac{1}{2} n (n + 1)}{n^2}$$

كما سبق بالقسمة على أعلى أس نحصل على :

$$\lim_{n \to \infty} (\ldots) = \lim_{n \to \infty} \frac{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} (1/n)}{1} = \tfrac{1}{2}$$

مثـال (٦) :

اثبت أن :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$

الحـل :

نجمع البسط أولا ، فى سبيل ذلك نستخدم المتطابقة

$$(r + 1)^3 - (r - 1)^3 = 6 r^2 + 2.$$

عندما $r = 1$ نجد أن

$$2^3 - 0^3 = 6. (1^2) + 2$$

عندما $r = 2$ نجد أن

$$3^3 - 1^3 = 6. (2^2) + 2$$

عندما $r = 3$ نجد أن

$$4^3 - 2^3 = 6. (3)^2 + 2$$

عندما $r = 4$ نجد أن

$$5^3 - 3^3 = 6.(4)^2 + 2$$

... ...

عندما $r = n - 2$ نجد أن

$$(n-1)^3 - (n-3)^3 = 6(n-2)^2 + 2$$

عندما $r = n - 1$ نجد أن

$$n^3 - (n-2)^3 = 6(n-1)^2 + 2$$

عندما $r = n$ نجد أن

$$(n+1)^3 - (n-1)^3 = 6n^2 + 2$$

بالجمع نحصل على

$$(n+1)^3 + n^3 - 1 = 6(1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2) + 2n$$

$$2n^3 + 3n^2 + 3n = 6(\Sigma\ r^2) + 2n$$

$$\therefore\ 2n^3 + 3n^2 + n = 6(1^2 + 2^3 + \ldots\ldots + n^2).$$

ومن ثم نجد أن البسط هو :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 2n^2 + n}{6}$$

ثم نعتبر النهاية

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2}{n^3} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

بند ٣ ـ ٤ ـ النظريات الأساسية للنهايات. Theorems on Limits :

نظرية (أ) :

اذا كانت $f(x) = mx + b$ حيث « b , m » عبارة عن أعداد حقيقية فان $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$.

البرهان :

الخطوات المنطقية فى البرهان هنا هى أن نثبت أنه لأى عدد موجب « ϵ » يمكن ايجاد عدد آخر « δ » (يعتمد على « ϵ ») بحيث يكون $|mx + b - (ma + b)| < \epsilon$ لجميع قيم « x » التى تحقق $0 < |x - a| < \delta$

ولذلك نبدأ بالقيمة العددية

$$|(mx + b) - (ma + b)| = |(mx - ma) + (b - b)|$$

$$= |m(x - a)| = |m|\,|x - a| < \epsilon \qquad (1)$$

وحيث ان « m » عبارة عن عدد حقيقى فمن المحتمل أن تكون موجبة او سالبة أو صفر ولهذا يكون لدينا أحد الاحتمالات الآتية :

(أ) اذا كانت $m > 0$ ينتج من المتباينة (١) أن

$$|x - a| < \frac{\epsilon}{m} = \delta$$

(ب) اذا كانت $m < 0$ ينتج من المتباينة (١) أن

$$|x - a| < \frac{\epsilon}{-m} = \delta$$

(جـ) اذا كانت $m = 0$ فان المتباينة (١) سوف تحقق لجميع قيم « x » وذلك لان : $0 \,.\, |x - a| = 0 < \delta$

وتعميما للحالات الثلاثة السابقة يكون لدينا $0 < |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}$

ومن ثم نستنتج أن :

$$\lim_{x \to a} mx + b = ma + b$$

وهو المطلوب اثباته .

مثـال (١) :

أوجد

$$\lim_{x \to 2} \left(\tfrac{1}{2} x + 5\right)$$

الحـل :

$$\lim_{x \to 2} (\tfrac{1}{2} x + 5) = \tfrac{1}{2} \times 2 + 5 = 1 + 5 = 6.$$

نتيجـة :

اذا كانت $f(x)$ عبارة عن مقدار ثابت $f(x) = k$ فان نهايتهـا عندما تؤول « x » الى « a » يساوى نفس الدالة $f(x)$. اى أن نهاية المقدار الثابت هى نفس الثابت

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k.$$

مثـال (٢) :

وكمثال على ذلك نجد :

$$\lim_{x \to 5} (6) = 6.$$

وذلك لأن الدالة هنا ثابتة وتسـاوى الرقم (6) لجميع القيم للمتغير « x » فعليه نجد أن النهاية عندما $x \to 5$ هى قيمة الدالة نفسـها اى الرقم (6) والآن نتعرض لنظرية أخرى .

نظرية (٢) :

اذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = L$ وكانت $(L > 0)$ فانه توجد فترة مفتوحة $(a - \delta , a + \delta)$ بحيث يكون $f(x) > 0$ لجميع قيم « x » الواقعة فى الفترة المفتوحة $(a - \delta , a + \delta)$ وربما يستثنى من ذلك النقطة $x = a$.

البرهان :

من التعريف الرياضى للنهايات

$$| f(x) - L | < \varepsilon \text{ for } | x - a | < \delta$$

فاذا اخذنا $\varepsilon = \tfrac{1}{2} L$ فان الفترة المفتوحة $(L - \epsilon , L + \epsilon)$ تحتوى أعدادا موجبة فقط . ومن ثم يتحقق المطلوب وهو انه يمكن ايجاد $(o < \delta)$ بحيث انه عند $0 < | x - a | < \delta$ اى « x » واقعة فى الفترة المفتوحة $(a - \delta , a + \delta)$, $x \neq a$ فان الدالة $f(x)$ تقع فى الفترة $(L - \varepsilon , L + \varepsilon)$ اى $f(x) > 0$.

نظرية (٣) :

نهاية حاصل الجمع الجبرى للدالتين $f(x), g(x)$ (أو اكثر من دالتين) عندما تؤول « x » الى « a » يساوى حاصل الجمع الجبرى لنهاية الدالتين (أو الدوال) عندما تؤول « x » الى « a » .

أى انه اذا كانت

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

فان :

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B..$$

البرهان :

سوف نبرهن حالة الجمع فقط ونترك حالة الطرح للقارىء كتمرين. ولاثبات ذلك يجب علينا ان نثبت انه لأى عدد موجب « ε » يمكن ايجاد عدد آخر « δ » (يعتمد على « ε ») بحيث يكون $|(f(x) + g(x) - (A + B)| < \varepsilon$ لجميع قيم « x » بحيث $0 < |x - a| < \delta$ ولذلك نستخدم النظرية (٢) فى (١ — ٧) فنحصل على :

$$|(f(x)+g(x)) - (A+B)| = |(f(x)-A) + (g(x) - B)|$$
$$\leqslant |f(x) - A| + |g(x) - B| \ldots\ldots\ldots$$

ولكن نظرا لأن :

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad , \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

فان هذا يعنى أن :

لقيم « x » حيث $0 < |x - a| < \delta_1$ فان $|f(x) - A| < \varepsilon_1$

وكذلك لقيم « x » حيث $0 < |x - a| < \delta_2$ فان $|g(x) - B| < \varepsilon_2$

فاذا اخترنا $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon$ فانه يمكننا ايجاد عدد « δ » أصغر من كل من العددين δ_1, δ_2 وعليه تصبح المتباينة (١) فى الصورة الآتية : لجميع قيم « x » التى تحقق $|x - a| < \delta$ فان

$$|f(x)+g(x)-(A+B)|<|f(x)-A|+|g(x)-B|$$

$$<\varepsilon_1+\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

وبهذا يثبت المطلوب

مثـال (٣) :

اذا كان $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\ ,\quad \lim\limits_{x\to 2} x+2=4$

فان $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x}+x+2\right)=\frac{1}{2}+4=4\frac{1}{2}$

نظرية (٤) :

نهاية حاصل ضرب دالتين $f(x)\ ,\ g(x)$ عندما تؤول « x » الى « a » تســاوى حاصل ضرب نهايتى الدالتين عندما تؤول « x » الى العدد « a » أى ان :

$$\lim_{x\to a} f(x)\,.\,g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\,.\,\lim_{x\to a} g(x).$$

البرهان :

لاثبات هذه النظرية يتعين أن نثبت أنه لأى عــدد موجب « ε » يمكن ايجـــاد عــدد آخر « δ » (يعتمــد على « ε ») بحيث يكون $|f(x)\,.\,g(x)-A.B|<\varepsilon$ لجميـــع قيم « x » التى تحقــق $0<|x-a|<\delta$ ولذلك نتبع الخطوات التالية :

$$|f(x)\,.\,g(x)-A.\,B|=|f(x)\,(g(x)-B)+(f(x)-A)\,B|$$

$$\leqslant|f(x)|\ |g(x)-B|+|B|\ |f(x)-A|\,.$$

ولكن نظرا لان :

$$\lim_{x\to a} g(x)=B\,.\qquad \lim_{x\to a} f(x)=A$$

فانه يمكننا اختيار $(0 < \delta_1)$ بحيث

$$| f(x) - A | < \frac{\epsilon}{2B} \text{ for } | x - a | < \delta_1$$

وكذلك يمكننا اختيار δ_2 بحيث انه لجميع القيم « x »
الواقعة فى $| x - a | < \delta_2$ فان $| f(x) | < P$ حيث (P)
مقدار موجب بحيث $P > | A |$

وكذلك يمكننا اختيار $\delta_3 > 0$ بحيث انه لجميع القيم « x »
الواقعة فى الفترة $| x - a | < \delta_3$ فان

$$| g(x) - B | < \frac{\varepsilon}{2P}$$

والآن بالتعويض فى المتباينة الأولى نجد أن :

$$| f(x)\, g(x) - A B | < P . \frac{\varepsilon}{2P} + B . \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon$$

وذلك لجميع قيم « x » الواقعة فى الفترة $| x - a | < \delta$
حيث « δ » اصغر الأعداد $\delta_1 , \delta_2 , \delta_3$. وهذا يثبت صحة النظرية

نتيجة (١) :

اذا كانت احدى الدالتين مقدار ثابت « k » فان :

$$\lim_{x \to a} k\, g(x) = k \lim_{x \to a} g(x)$$

نتيجة (٢) :

يمكن تعميم النظرية السابقة لأكثر من دالتين فنجد أن :

$$\lim_{x \to a} f(x) . g(x) . h(x) \ldots\ldots t(x)$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x) . \lim_{x \to a} h(x) \ldots . \ldots\ldots \lim_{x \to a} t(x) .$$

نتيجة (٣) :

اذا تساوت جميع الدول فى النتيجة السابقة فإننا نحصل على الآتى :

$$\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$$

حيث « n » عدد صحيح موجب

ويمكن استنتاج الآتى :

1) $\lim_{x \to a} (x^n) = (\lim_{x \to a} x)^n = a^n$

2) $\lim_{x \to a} k\, x^n = k\, a^n$

نظرية (٥) :

اذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود فان :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

البرهان :

حيث ان $f(x)$ كثيرة حدود فيمكننا كتابتها فى الصورة

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_0$$

حيث « n » عدد صحيح موجب $b_n , b_{n-1} , \ldots\ldots b_0$ اعداد حقيقية . بتطبيق نتائج النظرية السابقة نجد أن :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_n \lim_{x \to a} x^n + b_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + \ldots + b_0$$

$$= b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + b_0 = f(a)$$

نظرية (٦) :

اذا كان لدينا الدالتين $f(x) , g(x)$ فان نهاية خارج قسمتها يساوى خارج قسمة نهاية كل من الدالتين عندما تؤول « x » الى العدد « a » اى أنه اذا كانت :

$$\lim_{x \to a} f(x) = A , \quad \lim_{x \to a} g(x) = B \qquad (B \neq 0)$$

فان :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$$

بحيث تكون $B \neq 0$ (لماذا ؟)

وتترك برهان هذه النظرية للقارىء كتمرين .

نتيجة :

يمكننا استنتاج النتيجة التالية :

اذا كانت $q(x)$ دالة كسرية وكانت « a » فى نطاق هذه الدالة فان :

$$\lim_{x \to a} q(x) = q(a).$$

وذلك واضح من تعريف الدالة الكسرية على انها خارج قسمة كثيرة حدود واستخدام النظرية السابقة والنتائج التى حصلنا عليها من قبل .

مثـال :

أوجد النهايات الآتية :

$$\lim_{x \to 1} (4x^3 + 5x - 2), \qquad \lim_{x \to 2} \frac{5x^3 - 16x}{2x + 4}$$

الحـل :

نستخدم النظريات السابقة لنحصل على :

$$\lim_{x \to 1} (4x^3 + 5x - 2) = 4(1)^3 + 5 \times 1 - 2 = 4 + 5 - 2 = 7$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x^3 - 16x}{2x + 4} = \frac{5(2)^3 - 16(2)}{2(2) + 4}$$

$$= \frac{40 - 32}{4 + 4} = 1.$$

نظرية (٧):

اذا كانت $n , a > 0$ عـــدد صـــــحيح او اذا كانت $n , a < 0$ ، n عدد صحيح فردى .

فان :
$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} .$$

البرهان :

لنفرض ان $n , a > 0$ اى عدد صحيح . ونرغب ان نثبت ان لأى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ (يعتمد على ε) بحيث ان لجميع قيم « x » التى تحقق (1) $0 < |x - a| < \delta$ فان

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon$$

يكفى ان نثبت ان لقيم $\sqrt[n]{a} > \epsilon$ فانه توجد « δ » تحقق (١) . لأنه اذا كانت هناك « δ » تحقق هذا الشرط فيمكننا استخدامهـا لأى « ε » اكبر من ذلك . ومن ثم ففيما تبقى من البرهان فاننا سنعتبر $\sqrt[n]{a} - \varepsilon$ مقدار موجب اصغر من « ε » نفسها . ويمكننا صياغة (١) فى صورة المتباينات المكافئة الآتية :

$$- \varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \varepsilon$$

$$\sqrt[n]{a} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{a} + \varepsilon .$$

وبالرفع للأس « n » نحصل على

$$(\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n < x < (\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n$$

ويطرح « a » نجد :

$$(\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n - a < x - a < (\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a$$

او يمكن وضعها فى الصورة الآتية :

$$- [a - (\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n] < x - a < [(\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a]$$

اذا اعتبرنا « δ » تمثل اصغر العددين

$$a - (\sqrt[n]{a} - \varepsilon)^n , \ (\sqrt[n]{a} + \varepsilon)^n - a$$

ون ثم فاذا اعتبرنا أن $- \delta < x - a < \delta$ فان المتبـاينة الاخيرة صحيحة .

وعليه تكون الأولى أيضا صحيحة . وهذا يعطينا الشرط (١) .

والآن لنفترض ان $a < 0$, n عدد صحيح فردى فى هــذه الحالة فان « $-a$ » (وكذلك $\sqrt[n]{a}$ —) اعداد موجبة . وبما سبق من برهان يمكننا كتابة

$$\lim_{-x \to -a} \sqrt[n]{-x} = \sqrt[n]{-a} .$$

ومن ثم فانه لأى عدد $(\varepsilon > 0)$ يمكننا ايجاد $(\delta > 0)$ تحقق

$$\left| \sqrt[n]{-x} - \sqrt[n]{-a} \right| < \varepsilon \quad \text{for} \quad \left| -x - (-a) \right| < \delta .$$

وهذا يحقق الشرط (١) أيضا بعد أن نضعه فى نفس الصورة .

نظرية (٨) :

اذا كانت :

$$\lim_{x \to a} g(x) = B , \quad \lim_{x \to a} f(x) = A$$

حيث $A \neq 0$ فان :

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = A^B .$$

والنظرية نترك اثباتها للقارىء .

نظرية (٩) :

من النهايات التى لها اهمية خاصة النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

البرهان :

سنبرهن الآن الحالة عندما تكون « n » عدد صحيح موجب .

عندما $x \neq a$ فان الدالة $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ يمكن كتابتها فى الآتية :

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + a\,x^{n-2} + \dots\dots\dots\dots + a^{n-1}$$

وباخذ النهايات نجد أن :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + a\,x^{n-2} + \dots + a^{n-1})$$

$$= n\,a^{n-1}$$

وفى الحالة « n » عدد صحيح سالب يمكننا كتابة $n = -m$ حيث « m » فى هذه الحالة عدد صحيح موجب . وتعتبر النهاية فى هذه الحالة .

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{a^m x^m (x^{-m} - a^{-m})}{a^m x^m (x - a)} = \lim_{x \to a} \frac{a^m - x^m}{a^m x^m (x - a)}$$

وباستخدام النظرية السابقة ونظريات القسمة نجد :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{-m\,a^{m-1}}{a^{2m}} = (-m)\,a^{-m-1} = n\,a^{n-1}$$

وهى نفس النتيجة السابقة

ولنترك البرهان فى حالة « n » عدد كسرى للقارىء .

نظرية (١٠) :

اذا كانت $f(x) < g(x) < h(x)$ حيث h , g , f دوال للمتغير « x » معرفة فى نفس النطاق (الحيز) واذا كان

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$$

فان :

$$\lim_{x \to a} g(x) = A.$$

البرهان :

نجد من المعطيات انه لكل عدد حقيقى « ε » يمكن ايجاد عدد آخر « δ » بحيث

$$|f(x) - A| < \varepsilon , \quad |h(x) - A| < \varepsilon .$$

لجميع قيم « x » التى تحقق المتباينتين السابقتين حيث $0 < |x - a| < \delta$ وبذلك يكون لدينا

$$A - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < A + \varepsilon$$

او $|g(x) - A| < \varepsilon$ وبطريقة اخرى

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$$

لجميع قيم « x » حيث $|x - a| < \delta$ التى تحقق المتباينتين السابقتين .

وهو المطلوب اثباته .

مثال (٥) :

اوجد :

$$\lim_{x \to 3} (2x^3 + 7x^2 + 6)$$

الحـــل :

$$\lim_{x \to 3} (2x^3 + 7x^2 + 6) = 2(3)^3 + 7(3)^2 + 6 = 123$$

مثال (٦) :

النهاية الآتية :

$$\lim_{x \to 2} \left((x^2 - x)\sqrt{4x + 1} \right) =$$

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x) . \lim_{x \to 2} \sqrt{4x + 1}$$

$$= \left\{ \lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} (x) \right\} \left\{ \lim_{x \to 2} \sqrt{4x + 1} \right\}$$

$$= (2^2 - 2)\sqrt{(4 \times 2 + 1)} = 2\sqrt{9} = 6 .$$

مثال (٦) :

النهاية

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

هذه النهاية من نوع نهايات نظرية (٩) . ومن ثم نجد :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = 3.\ (3)^{3-1} = 3\ (3)^2 = 27\ .$$

مثال (٧) :

النهاية

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x^3 + 8}$$

يمكن تحويلها الى النوع الذى فى نظرية (٩) وذلك كما يلى :

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x^3 + 8} = \lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2} \cdot \frac{x + 2}{x^3 + 8}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2} \cdot \lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$$

$$= 5\ (-2)^4 \cdot \frac{1}{3\ (-2)^2} = \frac{5}{3}\ (-2)^2 = \frac{20}{3}\ .$$

بند ٢ ـ ٥ ـ الدوال الأسية واللوغاريتمية :

Exponential and logarithmic functions

هذه المجموعة من الدوال هى من نوع الدوال المسترسلة . وامثال هذه الدوال لها تطبيقات كثيرة فى فروع الفيزياء والرياضيات التطبيقية والهندسية .

اولا ـ الدوال الأسية Exponential fns. :

هذا النوع من الدوال هو الذى على الصورة $y = a^x$

حيث « a » عدد موجب $x \in R$. ومن الملاحظ أن $y \in R^+$

وفى بعض الأحيان يكون الأساس له اهمية خاصة . ومن هـــذه الأساسا ت مايعرف بالأساس الطبيعى للوغاريتمات وهو ماتعرض لتعريفه فيما يلى :

ا ـ ٥ ـ ١ تعريف الأساس الطبيعى للوغاريتمات :

العدد الحقيقى الذى يقع بين 2 , 3 . وقيمتهالتقريبية 2.7182812807

ويرمز له بالرمز « e » يطلق عليه الأساس الطبيعى للوغاريتمات ويعرف على أساس أنه نهاية كما يلى :

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

ويمكن وضع هذه النهاية فى صورة متسلسلة لا نهائية كما يلى :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

ونسوق الآن برهان لهذه الصورة ولكنه تعوزه الدقة الرياضية .

من التعريف كنهاية واستخدام نظرية ذات الحدين نجد ان :

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n =$$

$$\lim_{n \to \infty} \{ 1 + \frac{n}{1!} (\frac{1}{n}) + \frac{n(n-1)}{2!} (\frac{1}{n})^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (\frac{1}{n})^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-3)}{4!}\left(\frac{1}{n}\right)^4$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

وباختصار الحدود واستخدام النظريات السابق ذكرها في النهايات نجد أن :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$+ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots$$

ويبقى بعد ذلك أن نثبت أن هذه المتسلسلة تقاربية . ونذلك سنتحول الى اثبات أن « e » لايمكن أن تتعدى العدد ٣ كحد علوى أو العدد ٢ كحد أدنى .

من الواضح أن جميع حدود المتسلسلة موجبة فاذا بترنا المتسلسلة بعد الحد الثانى فنرى أن :

$$e > 1 + \frac{1}{1!} = 1 + 1 = 2$$

وهذا هو الحد الأدنى . ولايجاد الحد الأعلى نحاول أن نستبدل كل الحدود التى بعد الحد الثالث بمقادير أكبر منها فمثلا :

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{3 \times 2 \times 1} < \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

وكذلك :

$$\frac{1}{4\,!} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} < \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = (\tfrac{1}{2})^3$$

وهكذا نحصل على :

$$\therefore e < 1 + \{ 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \ldots\ldots\ldots \}$$

والمقدار الذى بين قوسين عبارة عن متوالية هندسية لانهائية حدها الأول (١) وأساسها (½) فيكون مجموعها :

$$\frac{1}{1 - \tfrac{1}{2}} = \frac{1}{(\tfrac{1}{2})} = 2$$

ومن ثم نجد : $e < 1 + 2 = 3$

اى ان : $2 < e < 3\,.$

٣ ـ ٥ ـ ٢ تعريف الدالة الأسية e^x :

تعرف كالنهاية التالية :

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \{ (1 + \frac{1}{n})^n \}^x =$$

$$= \lim_{n \to \infty} [1 + \frac{1}{n}]^{nx}$$

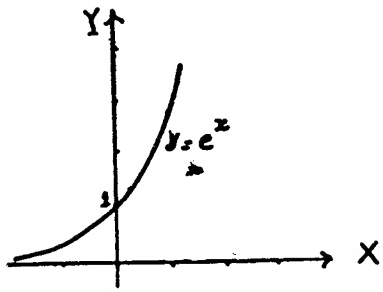
أو بالتعريف المشابه

$$e^x = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

يمكن كتابة الدالة الأسية « e^x » فى صورة متسلسلة لانهائية كما يلى :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots\ldots$$

وبرهنـــة ذلك مشـــابهة للجزء الأول من برهان مفكوك (e)
ولتمثيل الدالة الأسية بيانيا نجد انه لجميع القيم $0 < x$ فان قيمة « y »
تتزايد تبعـــا لزيادة قيم « x »
ولذا فانه عنـدما $x \to \infty$
فان $y \to \infty$ بينما نجد أن قيمة
الدالة تتناقص تدريجيا يتناقص قيمة
« x » ولذلك فانه عندما $x \to -\infty$
فان $y \to 0$. وواضـح ان
$y = 1$ عند $x = 0$ والشكل العام
يظهر فى شكل (٣ ـ ٥ ـ ١) المقابل.
ومن الشـــكل نجد ان نطاق الدالة
الأسية هو الفترة العـددية اللانهائية $(-\infty , \infty)$ واما المدى فهو الفترة
$(0, +\infty)$



شكل ٣ ـ ٥ ـ ١ الدالة $y=e^x$

مثال (١) :

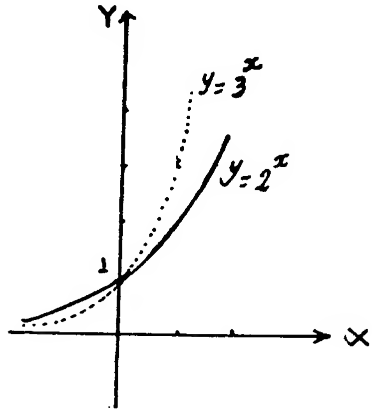
مثل كل من الدالة الأسية التالية بيانيا

$y = 2^x , y = 3^x$

الحل :

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81.	243

والرسم الآتى يوضح هاتين الدالتين :



شكل ٣ ـ ٥ ـ ٢

ثانيا ـ الدوال اللوغاريتمية Logarithmic functions :

٣ ـ ٥ ـ ٣ تعريف :

يدعى الأس أو القوة « y » التى يرفع اليهـا العـدد « a » ليكون الناتج « x » بلوغاريتم « x » للأساس « a » ويكتب فى الصورة

$$y = \log_a x$$

حيث : $a \neq 1. , a > 0 , x > 0$

هذه الدالة هى الدالة العكسية للدالة الأسية $y = a^x$.

أى أن اذا كان $y = a^x$ فان الدالة العكسية هى الدالة اللوغاريتمية $y = \log_a (x)$. والعكس صحيح .

مثال (٢) :

الصور الآتية مماثلة لبعضها

1) $\log_3 9 = 2 \longleftrightarrow 9 = 3^2$

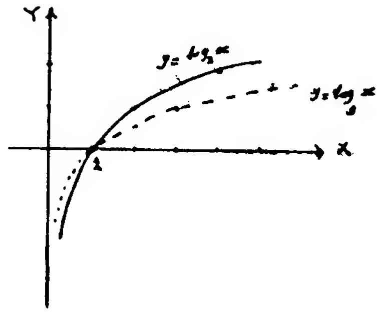
2) $\log_2 32 = 5 \longleftrightarrow 2^5 = 32$

3) $\log_6 1 = 0 \longleftrightarrow 6^0 = 1$

4) $\log_8 4 = \frac{2}{3} \longleftrightarrow 8^{2/3} = 4.$

ويمثل الشكل التالى منحنى الدالتين :

$y = \log_3 (x)$, $y = \log_2 (x)$.



شكل ٣ ــ ٥ ــ ٣

نلاحظ من الشكل السابق أن منحنى الدالة $y = \log_a x$ يقطع محور السينات عند النقطة $(1, 0)$ وذلك لأن $\log_a 1 = 0$. ونلاحظ أيضا أنه فى الفترة $(1, \infty)$ تتزايد قيمة « y » بتزايد قيمة « x » بحيث نجد

$$\lim_{x \to \infty} y = \infty$$

بينما نجد أنه فى الفترة $(0, 1)$ تكون قيم « y » سالبة وتتناقص تدريجيا بتناقص قيم « x » ونرى $y \to -\infty$ عندما $x \to 0$.

ملاحظات :

١ ــ يمكن حذف أساس اللوغاريتم إذا كان مساويا للعدد ١٠ ويسمى عندئذ باللوغاريتم المعتاد .

$$\log x = \log_{10} x .$$

٢ ــ اذا كان أســـاس اللوغاريتم هو عبـارة عن العــدد « e » فان اللوغاريتم فى هذه الحالة يسمى باللوغاريتم الطبيعى ويرمز له بالرمز « ln » . اى ان :

$$\ln (x) = \log_e (x) .$$

٣ ــ ٥ ــ ٤ ــ بعض قوانين الأسس واللوغاريتمات :

1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \longleftrightarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2) $\log_a (x \div y) = \log_a x - \log_a y \longleftrightarrow a^x/a^y = a^{x-y}$

3) $\log_a x^n = n \log_a x \longleftrightarrow (a^x)^n = a^{nx}$

4) $\log_a x = (\log_b x)(\log_a b)$

ومن تعريف الدوال العكسية نجد أن :

5) $\ln (e^x) = x \ , \ e^{(\ln x)} = x$

أو عموما

6) $\log_a (a^x) = x \ , \ a^{(\log_a x)} = x$

ويمكن حساب

7) $\log_e 10 = 2.302585$

8) $\log_{10} e = 0.434295$

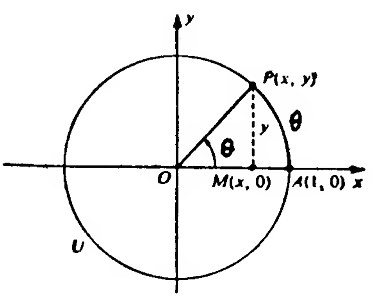
بعد أن استخدمنا النهايات فى تعريف الدالة الأسية وكذلك عرفنا معكوس الدالة الأسية وهى الدالة اللوغاريتمية . نطبق النهايات لمعرفة بعض النهايات الخاصة .

بند ٣ ـ ٦ نهايات بعض الدوال الخاصة .

نظرية (١) :

$$\lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0 \ , \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1.$$

حيث « θ » مقاسة بالتقدير الدائرى



شكل ٣ ـ ٦ ـ ١

البرهان :

بالنظر الى المثلث APM القائم الزاوية « M » فالشكل (المقابل شكل ٣ ـ ٦ ـ ١) نحصل على :

$AM = 1 - \cos \theta$ (2)

$MP = \sin \theta$ (1)

(لماذا ؟)

ونظرا لأن $AP < \theta$ (لماذا) فبتطبيق نظرية فيثاغورث على كل من (١) ، (٢) نحصل على :

$$(\sin \theta)^2 + (1 - \cos \theta)^2 < \theta^2$$

وحيث أن كل من $\sin^2 \theta$, $(1 - \cos \theta)^2$ مقادير موجبة وكل منهما يعتبر أصغر من قيمة حاصل جمعهما اى أصغرمن « θ^2 » فيمكننا كتابة

$$\sin^2 \theta < \theta^2 \qquad (1)$$

$$(1 - \cos \theta)^2 < \theta^2 \qquad (2)$$

وبتطبيق مفهوم القيمة المطلقة على المتباينتين السابقتين نحصل على :

$$|\sin \theta| < \theta \qquad |1 - \cos \theta| < \theta .$$

فاذا اعتبرنا ان $\delta = \theta > 0$ فباستطاعتنا القول عندئذ أن :

$$|\sin \theta - 0| < \theta , \qquad |\cos \theta - 1| < \theta$$

عندما تكون $0 < |\theta| < \delta$. وعليه فان :

$$\lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0 , \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1 .$$

وهو المطلوب اثباته

نظرية (٢) :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

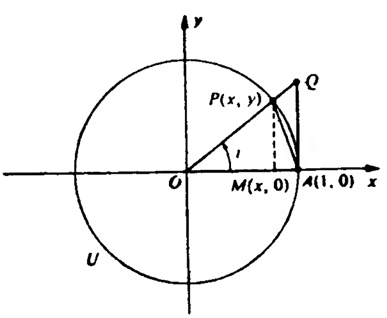
حيث « θ » مقاسة بالتقدير الدائرى .

البرهان :

من الشكل المقابل (٣ـ٦ـ٢) نستطيع ملاحظة مايلى : المستقيم PM اقصر من القوس PA . وهكـــذا القوس بدوره أقصر من المستقيم AQ

يمكن صياغة هــذه الحقائق رياضيا فى المتباينتين الآتيتين :

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$



شكل ٣ ـ ٦ ـ ٢

حيث « θ » هنـــا تحقق $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ وبقســـمة هاتين المتباينتين على المقدار $\sin\theta$ نحصل على :

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

او

$$1 > (\sin\theta)/\theta > \cos\theta$$

ونهايتها طرفى المتباينة هما :

$$\lim_{\theta \to 0} 1 = 1 , \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$$

وذلك باستخدام النظرية السابقة . فاذا ما استخدمنا نظرية (١٠) بند (٣ — ٤) ينتج أن :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

وهو المطلوب اثباته .

مثال (١) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \times \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

مثال (٢) :

$$\lim_{x \to 0} \tan x = \lim_{x \to 0} x \frac{\tan x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 0 \times 1 = 0$$

مثال (٣) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= 2 \times \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$$

$$= 2 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

مثال (٤) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x} = \lim_{x \to 0} -2 \frac{\sin (3x) \sin x}{x^2}$$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} \times \frac{\sin x}{x}$$

$$= -2 \times 3 \times 1 = -6.$$

مثال (٥) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec 4x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 4x (\sec 4x - 1)}{(\cos 4x) . x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos 4x)}{(\cos 4x) . x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 4x} \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2}$$

$$= 2. \ 1. \ (2)^2 = 8.$$

بند ٣ ـ ٧ ـ الاستمرار (الاتصال) Continuity :

اذا نتج أن التمثيل البيانى لدالة ما عبارة عن منحنى أملس متصل عندما يأخذ المتغير المستقل فى تلك الدالة قيما تنتمى الى نطاق (حيز) الدالة ، فاننا نقول عندئذ ان تلك الدالة عبارة عن « دالة متصلة » (مستمرة) لجميع قيم المتغير المستقل المنتمية لنطاقها . هذا هو المفهوم العام عند القول أن « دالة ما متصلة (مستمرة) » . نلاحظ اننا استعملنا كلمات غامضة نسبيا مثل منحنى أملس ومتصل . ولازالة هذا الغموض ولصياغة مفهوم الاتصال فى صورة دقيقة سنعرف من التعريف التالى للاتصال عند نقطة،التعريف الرياضى الدقيق لهذا المفهوم .

٣ ـ ٧ ـ ١ تعريف اتصال (استمرار) الدالة عند نقطة :

اذا كانت $f(x)$ دالة على « x » معرفة لجميع قيم « x » القريبة من $x = a$. اضافة الى انها معرفة عند $x = a$. فان الدالة $f(x)$ تعتبر دالة متصلة عند $x = a$ اذا كان :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) .$$

يلاحظ هنا انه لتحقيق الشرط $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ يجب ان يتحقق .

(١) أن النهاية $\lim_{x \to a} f(x) = A$ يمكن ايجادها (Exist)

(٢) أن $f(a)$ يمكن ايجادها اى ان الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x = a$.

(٣) أن يكون $f(a) = A$.

مثال (١) :

اذا كان $f(x) = x + 2$ لجميع قيم « x »

فمن الملاحظ ان $f(2) = 4$ وكذلك $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$

ومن ثم نرى أن الشرط الذى أعطى عند تعريف الدالة واتصالها قد تحقق هنا .

اى ان :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2).$$

وعليه فان الدالة $f(x) = x + 2$ عبارة عن دالة متصلة عند $x = 2$.

مثال (٢) :

اذا كان $f(x) = x^2$ لجميع قيم « x »

فمن الملاحظ $f(3) = 3^2 = 9$ وكذلك $\lim_{x \to 3} (x^2) = 9$.

ومن هنا نجد ان شروط اتصال الدالة عند $x = 3$ وهى ان :

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 9$$ محققة

ولذلك فان الدالة $f(x) = x^2$ دالة متصلة عندما $x = 3$.

مثال (٣) :

اذا عرفنا الدالة $f(x)$ كما يلى :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

اى ان $f(2) = 0$.

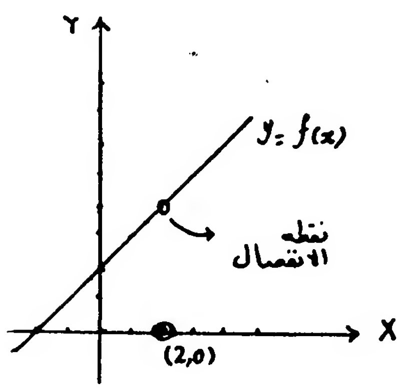
بينما نجد ان :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

ومن ثم نرى ان :

$$f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$$

ولذلك فان الدالة $f(x)$ لاتعتبر دالة متصلة عند $x = 2$.



شكل ٣ – ٧ – ١

ملاحظات :

١ ـ تسمى القيم التى يأخذها المتغير المستقل « x » فى الدالة f (x) والتى لاتحقق شرط الاتصال (الاستمرار) بنقط الانفصال (Discontinuities).

٢ ـ تسمى الدالة غير المتصلة عند نقطة أو عدة نقاط بالدالة المنفصلة (Discontinuities).

يمكن صياغة التعريف (٢ ـ ٧ ـ ١) فى صورة أخرى هى :-

٣ ـ ٧ ـ ٢ تعريف آخر لاتصال الدالة :

تعتبر الدالة f (x) دالة مستمرة (متصلة) عند $x = a$.
اذا كان لأى عدد صغير موجب $\varepsilon > 0$ يمكن ايجاد عدد آخر $\delta > 0$ بخيث يكون $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ لجميع قيم المتغير « x » التى تحقق $|x - a| < \delta$.

وفى حالة كون الدالة f (x) متصلة (مستمرة) عند جميع نقاط فترة عددية ما فاننا نقول أن هذه الدالة عبارة عن دالة متصلة (مستمرة) فى فترة عددية . ويمكن صياغة ماسبق فى صورة رياضية كما فى التعريف التالى :

٣ ـ ٧ ـ ٣ تعريف استمرار (اتصال) الدالة فى فترة عددية :

اذا كانت f (x) عبارة عن دالة حقيقية معرفة فى الفترة العددية المقفلة [a, b] فان هذه الدالة تعتبر مستمرة (أو متصلة) فى هذه الفترة العددية اذا كان واذا كان فقط .

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \quad \text{حيث} \quad a < c < b \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad (2)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \qquad (3)$$

أى اذا كانت وفقط اذا كانت الدالة f (x) مستمرة (متصلة) عند جميع نقاط تلك الفترة العددية .

نظرية (١) :

اذا كانت $g(x)$, $f(x)$ عبارة عن دوال حقيقية كل منها متصلة عند $x = a$ فان :

(1) $f(x) + g(x)$ عبارة عن دالة متصلة أيضا عند $x = a$

(2) $f(x) \cdot g(x)$ عبارة عن دالة متصلة أيضا عند $x = a$

(3) $f(x) / g(x)$ حيث $g(x) \neq 0$ هى الاخرى متصلة عند $x = a$ سنبرهن الجزء الأول ونترك الباقى كتمرين

حيث ان : $f(x)$, $g(x)$ دالتان متصلتان عند $x = a$. فان :

$$\lim_{x \to a} (f + g)\, x = \lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$$

$$= f(a) + g(a) = (f + g)\, a$$

وهذا يثبت المطلوب .

نظرية (٢) :

اذا كان f , g دوال بحيث $\lim_{x \to a} g(x) = b$ كانت « f » متصلة عند $x = b$ فان :

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

البرهان :

لنختار أى عـــدد $\varepsilon > 0$ وحيث « f » دالة متصلة عند « b » فيمكننا ايجاد δ_1 موجب بحيث انه لجميع قيم $|w - b| < \delta_1$ فان $|f(w) - f(b)| < \varepsilon$ وباحلال $g(x)$ محل w تحصل على :

$$|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon \quad \text{for} \quad |g(x) - b| < \delta_1 .$$

وحيث ان $\lim_{x \to a} g(x) = b$ وطبقا للعدد δ_1 يمكننا ايجاد عـــدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق التالى :

لجميع قيم « x » الواقعة فى $|x - a| < \delta$ فان $|g(x) - b| < \delta_1$

ومن ثم نحصل على

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon \text{ for } |x - a| < \delta$$

وهذا يعنى

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

$$= f(\lim_{x \to a} g(x)).$$

مثال (٤) :

اذا كان « f » هى الجذر النونى فاننا نحصل على :

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

وعليه اذا كانت g (x) دالة متصلة فان

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

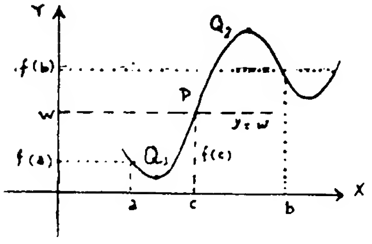
بحيث انه يجب التأكد من ان الجذر النونى موجود (Exist) .

نظرية (٢) :

اذا كانت الدالة « f » متصلة على فترة عددية مغلقة [a, b] فان الدالة « f » تأخذ جميع القيم الواقعة بين f (a) , f (b)

البرهان :

يطلق على هذه النظرية «نظرية القيمة المتوسطة» . وهى تعنى انه اذا كان w أى عدد بين f (a) , f (b) فانه يوجد عدد بين « a, b » وليكن « c » بحيث يكون w = f (c). ويمكن برهنة ذلك بيانيا من الرسم البيانى لمنحنى



شكل ٣ — ٧ — ٢
نظرية القيمة المتوسطة

الدالة الذى فى الشكل المقابل (٣ — ٧ — ٢) من النقطة (a, f (a)) الى النقطة (b, f (b)) فانه لأى عدد « w » يقع بين f (a) , f (b) يظهر اننا لو مررنا خطا افقيا يقطع المحور الصادى عند « y = w » فانه سوف يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأقل « P » والاحداثى السينى لهذه النقطة هو عدد « c » بحيث ان w = f (c) .

ونتيجة لهذه النظرية اذا اختلفت اشارتا f (a) , f (b) فان هناك نقطة واحدة على الأقل « c » بحيث ان $f(c) = 0$.

نظرية (٤) :

اذا كانت f (x) عبارة عن دالة متصلة فى الفترة العددية المغلقة [a, b] فان الدالة f (x) عندئذ لها نهاية عظمى « M » لقيمة واحدة على الاقل من قيم « x » المنتمية لهذه الفترة . وكذلك لها قيمة صغرى « m » لقيمة واحدة على الأقل من قيم « x » المنتمية لنفس الفترة العددية . اضافة الى هذا فان هذه الدالة تكون محصورة بين كل من « m , M » اى ان :

$$m \leqslant f(x) \leq M$$

يمكن مراجعة المنحنى المرسوم فى شكل ٣ــ٧ــ٢ ملاحظةظ أن النقطة « Q_1 » هى نقطة النهاية الصغرى . بينما النقطة « Q_2 » هى نقطة النهاية العظمى .

مثال (٥) :

الدالة $f(x) = 4x^2$ عبارة عن دالة متصلة فى الفترة المغلقة [0, 4] (اثبت ذلك) واذا رسمنا هذه الدالة فى هذا النطاق فاننا نرى أن النهاية العظمى تكون عند «$x = 4$» أى $f(4) = 64$ بينما نجد أن النهاية الصغرى هى عند « $x = 0$ » اى $f(0) = 0$ ونشاهد تبعا لذلك ان الدالة فى الحالة تكون محصورة بين القيمتين (0) , (64) وذلك لأن (0) تمثل النهاية الصغرى، (64) تمثل النهاية العظمى . اى $0 \leqslant f(x) \leq 64$ لجميع قيم « x » بجانب اننا نلاحظ ان f (x) تأخذ جميع القيم الواقعة بين f (0) من جهة و f (4) من جهة اخرى .

بند ٢ ــ ٨ ــ دوال تؤول الى مالا نهاية :

لنعتبر تصرف الدالة $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ عندما تقترب « x » من العدد (٣) ولكن $(x \neq 3)$. فى هذه الحالة فان المقام $(x-3)^2$ يقترب من الصفر ومن ثم تكون f (x) كبيرة جدا ويمكننا أن نأخذ f (x) اكبر من أى عدد مختار وذلك باختيار « x » قريبة قربا كافيا

من (٣) فكما سنعرف من التعريف التالى أن هذا التصرف يمكننا الرمز له بالرمز :

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$$

٢ — ٨ — ١ تعريف دالة تؤول الى $+\infty$:

اذا عرفت $f(x)$ فى فترة عـــددية مفتوحة محتوية « a » (ربمـــا $x \neq a$) فان $f(x)$ تؤول الى ما لانهاية (أو تتزايد بغير حدود) عندما تقترب « x » من « a » ويرمز لها بالرمز

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

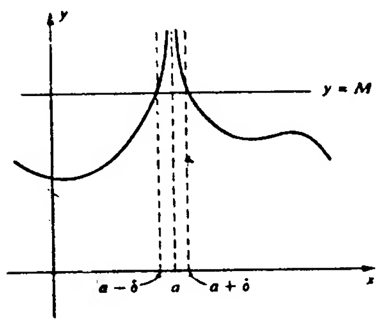
اذا كان لأى عدد موجب « M » يمكن ايجاد عدد $\delta > 0$ بحيث

$$f(x) > M \quad \text{for} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

فمثلا اذ اعتبرنا الشـــكل المقابل (شكل ٢ — ٨ — ١) فاذا اعتبرنا اى خط مســـتقيم افقى $y = M$ فعنـــدما تكون « x » فى الفترة المناسبة

$$a - \delta < x < a + \delta$$

ولكن $x \neq a$ فان نقط المنحنى تقع كلها أعلى هذا الخط .



$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

شكل ٢ — ٨ — ١

ويجب أن نوضح أن ∞ ليست عددا ومن ثم فان الرمز $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ لايعنى أن النهاية موجودة (exists) عندما تقترب « x » من « a » كل مافى الأمر ان مفهوم النهاية قد اســتخدم ليمثل تصرف الدالة المذكورة فقط .

وبالمثل يمكننا تعريف النهـــايات اليمنى واليسرى لدالة تؤول الى ما لانهاية .

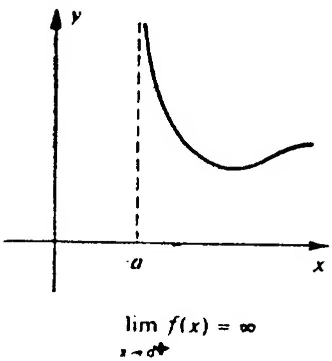
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

معناها ان $f(x) > M$ لجميع قيم « x » التى تحقق $a < x < a + \delta$

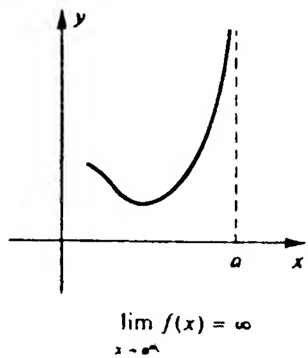
بينما نجد ان $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

تعنى ان $f(x) > M$ لجميع قيم « x » التى تحقق $a - \delta < x < a$.

والشكلان ٢ ــ ٨ ــ ٢ ، ٢ ــ ٨ ــ ٣ يمثلان هذا التصرف .



شكل ٢ ــ ٨ ــ ٣



شكل ٢ ــ ٨ ــ ٢

التعريف ٢ــ٨ــ١ يعرف تصرف الدوال التى تؤول الى $+ \infty$ والآن يمكننا ان نعبر عن الدوال التى تؤول الى $- \infty$ وذلك حسب التعريف التالى .

٢ ــ ٨ ــ ٢ تعريف نهاية دالة تؤول الى $- \infty$:

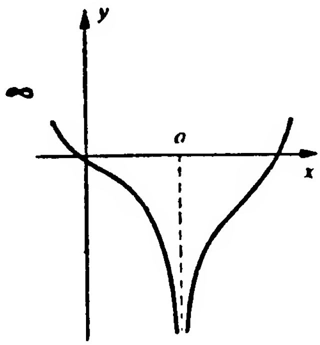
اذا عرفنا دالة فى فترة عددية تحتوى النقطة « a » (عدى عند النقطة $x = a$) فان $f(x)$ تصير الى $- \infty$ (أو تتناقص بغير حدود) ويرمز لها بالرمز

$$\lim_{x \to a} f(x) = - \infty$$

اذا كان لأى عدد سالب « N » يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث ان :

لجميع قيم « x » التى تحقق $0 < |x - a| < \delta$ فان $f(x) < N$

ويمكن تمثيل ذلك بيانيا كما فى الشكل ٢ ـ ٨ ـ ٤ . كما انه يمكننا أن نعرف النهايات اليمنى والنهايات اليسرى وتعريفات ذلك هى مجرد تغيير الفترة العددية المحصورة فيها « x » فمثلا :



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

الفترة العددية تصير

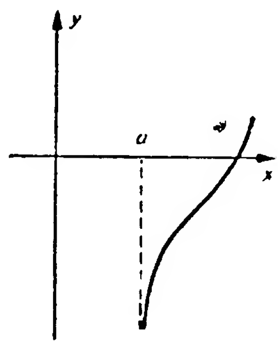
$$a - \delta < x < a$$

واما فى حالة

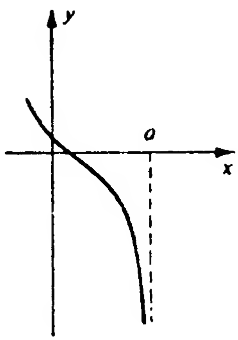
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

فان الشرط على« x » يصير $a < x < a + \delta$ حيث $\delta > 0$.

والشكلان ٢ ـ ٨ ـ ٥ ، ٢ ـ ٨ ـ ٦ يمثلان هذا التصرف .



شكل ٢ ـ ٨ ـ ٥



شكل ٢ ـ ٨ ـ ٦

نظرية (١) :

١ ـ اذا كانت « n » عدد صحيح زوجى فان

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x - a)^n} = \infty$$

٢ ـ اذا كانت « n » عدد صحيح فردى فان

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

مثال (١) النهايات الآتية :

$$\lim_{x \to -5} \frac{1}{(x+5)^4} = \infty$$

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{(x-5)^3} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 5^-} \frac{1}{(x-5)^3} = -\infty$$

تنطبق عليها النظرية السابقة . وكذلك :

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^6} = \infty$$

مثال (٢) :

ادرس تصرف الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ وارسم منحنى هذه الدالة

الحـل :

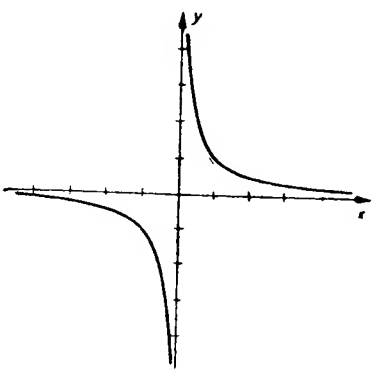
من الواضح أن :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

بينما :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ومن ثم فان الخط $x = 0$
هو خط تقـاربى للمنحنى



$f(x) = 1/x$

شكل ٢ ـ ٨ ـ ٧

وبالمثل نجد ان :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

ای انه يعتبر $y = 0$ خطا تقاربيا للمنحنى الذى يظهر فى شكل ٢ ـ ٨ ـ ٧

نظرية (٢) :

اذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} g(x) = c \neq 0$ فان

١ ـ $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \infty$

٢ ـ اذا كانت $c > 0$

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

٣ ـ اذا كانت $c < 0$ فان

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

مثال (٤) اوجد :

$$\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

الحل :

نضرب فى مرافق هذا العدد فنحصل على

$$\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$= \lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \left\{ \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})} \right\}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

نظرية (٣) :

اذا كان « a » عددا حقيقيا فان :

$$\lim_{n \to \infty} a^n \begin{cases} = 0 & \text{for } |a| < 1 \\ = 1 & \text{for } a = 1 \\ = +\infty & \text{for } a > 1 \end{cases}$$

لنترك برهان هذه النظرية للقارىء

مثال (٥) :

اوجد قيم النهايات الآتية :

1 $\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{2})^n$ 2) $\lim_{n \to \infty} (-1/3)^n$

3) $\lim_{n \to \infty} (2)^n$

الحـــل :

هذا المثال هو تطبيق مباشر للنظرية السابقة فمن ثم نجد :

$$\lim_{n \to \infty} (\tfrac{1}{2})^n = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} (-1/3)^n = 0$$

بينمـــا

$$\lim_{n \to \infty} (2)^n = \infty$$

تمارين

١ — أوجد قيم كل من النهايات التالية :

1) $\lim_{x \to 3} (x^3 - 5x^2 + 2x - 1)$

2) $\lim_{x \to 1} (x^3 - 4x^2 + x - 2)$

3) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2}\right)$

4) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

5) $\lim_{x \to 4} \left(\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{x - 4}\right)$

6) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{\frac{1}{x + 1} + 1}{x + 2}\right)$

7) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{5}}{x - 3}\right)$

8) $\lim_{x \to -3} \left(\frac{x^2 - 9}{x + 3}\right)$

9) $$\lim_{x \to 4} \left(\frac{(1 / \sqrt{x}) - \frac{1}{2}}{x - 4} \right)$$

10) $$\lim_{x \to 5} \frac{x^4 - 125\,x}{x^3 - 5\,x^2}$$

11) $$\lim_{h \to 0} \frac{(1/ (5 + h)) - 1/5}{h}$$

12) $$\lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{z^2 - 1}$$

13) $$\lim_{h \to 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h}$$

14) $$\lim_{h \to 0} \frac{(a + h)^3 - a^3}{h}$$

٢ ـ اذا كانت $f(x) = x^2 - 2x + 5$ فأوجد قيمة كل من النهايات الاتية :

1) $$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

2) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

٣ ـ اذا كانت $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ فأوجد قيمة كل من النهايات الاتية :

1) $$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(4+x) - f(4)}{x}$

٤ ـ أوجد قيم النهايات التالية مستخدما فى ذلك النظريات الخاصة ونتائجها :

1) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^2 - 1}{x}$

3) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

4) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^3 - 27}{h}$

5) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^3 - (1-h)^3}{h}$

6) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$

٥ ـ أوجد قيم النهايات التالية مستخدما فى ذلك نظريات النهايات :

1) $\lim_{x \to 9} (x^9 - 3x + 4\sqrt{x})$

2) $\lim_{x \to 8} (3x + 4\sqrt[3]{x})$

3) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x}$

4 $\lim_{x \to 2} \left(\frac{5x\sqrt{2x} - 2}{x} \right)$

٦ ـ اذا كانت $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ اوجد كل من :

1) $\lim_{x \to 2} f(x)$ 2) $\lim_{x \to 1} f(x)$

3) $\lim_{x \to -2} f(x)$ 4) $\lim_{x \to 3} f(x)$

٧ ـ اذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ فأوجد كل من :

1) $\lim_{x \to 2+} f(x)$, 2) $\lim_{x \to 2-} f(x)$,

3) $\lim_{x \to 2} f(x)$

ومثل بيانيا هذه الدالة .

٨ ـ اثبت أن :

1) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

2) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x) \;/\; \lim_{x \to a} g(x)$

$(\lim_{x \to a} g(x) \neq 0)$

٩ ـ أوجد قيم النهايات التالية :

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 + 4x - 9}{3x^2 - 3x + 7}$

2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 5 - 3}{x^3 - 2x}$$

3) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x + 1}{x}\right)$$

4) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 9x + 5}{2x^2 + 4x - 1}$$

5) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + 7}{x^2 - 3x + 1}$$

6) $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{4x^2 - 5x - 2}$$

7) $$\operatorname*{liim}_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 10}\right)$$

8) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x}{x - 1} - \frac{2x}{x + 1}\right)$$

9) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x + 3}{\sqrt{(3x + 2)^5}}\right)$$

10) $$\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{3x^2 + 6x - 3}\right)$$

11) $$\lim_{x \to \infty} \left(2x^2 - 3x\sqrt{x^2 - 3x + 5}\right)$$

12) $$\lim_{x \to \infty} \left(x^3 - x^4\,\overline{+\ 4}\right)$$

١٠ ـ اثبت الآتى :

1) $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e$

2) $\lim_{t \to 0} (1 + t)^{1/t} = e$

3) $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{nx} = e^x$

4) $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^{n} = e^x$

5) $\log_a (x . y) = \log_a x + \log_a y$

6) $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y.$

١١ ـ مثل بيانيا كل من الدوال الآتية :

1) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ 2) $f(x) = (2)^{x^2}$

3) $f(x) = 3^{1-x}$ 4) $f(x) = (2)^{-x^2}$

5) $f(x) = (2)^{x/2}$ 6) $f(x) = (1)^x$

١٢ ـ حل كل من المعادلات اللوغاريتمية الآتية :

1) $-4 = \log_a 16$ 2) $x = \log_2 (8)$

3) $5 = \log_a (1024)$ 4) $-4 = \log_2 (x)$

5) $5 = \log_2 (x)$ 6) $-4 = \log_a (1/32).$

١٣ ـ مثل بيانيا لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x) = \log_2 (x)$ 2) $f(x) = \log_4 (x)$

3) $f(x) = \log_3 (1 - x)$ 4) $f(x) = \log_2 (x/2)$

5) $f(x) = \log_2 (x^2)$ 6) $f(x) = \log (1 - x^2)$

١٤ ـ أوجد قيم كل من النهايات التالية :

1) $$\lim_{p \to 0} \left(\frac{P}{\sin (P/5)} \right)$$

2) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

3) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{(\tan \frac{x}{2})(1 - \cos 2x)}{x^3} \right)$$

4) $$\lim_{z \to 0} \left(\frac{1 - \cos 4z}{z^2} \right)$$

5) $$\lim_{k \to 0} \frac{\cos 2k - \cos 4k}{k^2}$$

6) $$\lim_{w \to \frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\cos w}{\pi/2 - w} \right)$$

7) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

8) $$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} .$$

9) $$\lim_{h \to 0} \frac{\sin (x + h) - \sin x}{h}$$

10) $$\lim_{h \to 0} \frac{\cos (x + h) - \cos x}{h} .$$

11) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$

12) $\lim_{x \to 2} e^x$ 13) $\lim_{n \to \infty} 2^n$

14) $\lim_{x \to \infty} e^x$.

١٥ ـ باستخدام النظريات الأساسية فى باب النهايات اثبت أن الدوال التالية تعتبر من الدوال المتصلة (المستمرة) عند اى قيمة للتغير « x » التى تنتمى الى حيز (نطاق) الدالة . ثم مثل هذه الدوال بيانيا :

1) $f(x) = 3x - 1$ 2) $f(x) = 4 - 2x$

3) $f(x) = x^2 - 1$ 4) $f(x) = 4 - x^2$

5) $f(x) = \sqrt{x}, \ (x > 0)$ 6) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

7) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right), \ (x \neq 0)$

8) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ $x \neq 0$.

١٦ ـ اذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

اثبت أن الدالة $f(x)$ عبارة عن دالة مستمرة (متصلة) عند $x = 2$.

١٧ ـ اثبت أن الدوال التالية تعتبر من الدوال المتصلة (المستمرة) عند النقاط الموضحة أمام كل منها .

1) $f(x) = \sin(x)$; $P(x, y) = (0, 0), \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

2) $f(x) = |x - 4|$; $P(x, y) = (6, 2), (2, 2), (4, 0)$

3) $f(x) = |x|$; ; $P(x, y) = (0, 0), (1, 1), (-1, 1)$

١٨ ـ أوجد نقط الانفصال للدوال الآتية :

1) $f(x) = \frac{x}{1 - x}$ 2) $f(x) = \frac{1}{x(1 + x)}$

3) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ 4) $f(x) = [x]$

5) $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{9 - x^2}}$ 6) $f(x) = \tan x.$

١٩ ـ أوجد قيم النهايات الآتية ثم ادرس اتصال الدوال عند النقط الموضحة أمام كل منها .

1) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x^{-3}}{x^2 - 4x + 3}$, $x = 3$, $x = 4$

2) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x - 3}{\sqrt{3x - 6} - \sqrt{x}}\right)$, $x = 4$, $x = 2$

3) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x - 1}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x}}\right)$, $x = 0$, $x = 1$

4) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$, $x = 2$, $x = 3$

5) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, $x = 1$, $x = -3$

6) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} [x]$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1.$

٢٠ ـ اوجد $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ لكل من
الدوال الآتية :

1) $f(x) = \frac{1}{x - 4}$, $a = 4$

2) $f(x) = \frac{5}{4 - x}$, $a = 4$

3) $f(x) = \frac{8}{(2x + 5)^3}$, $a = -\frac{5}{2}$

4) $f(x) = \frac{-4}{7x + 3}$, $a = -\frac{3}{7}$

5) $f(x) = \frac{3x}{(x + 8)^2}$, $a = -8$

6) $f(x) = \frac{3x^2}{(2x - 9)^2}$, $a = \frac{9}{2}$

7) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - x - 2}$; $a = -1$, $a = 2$

8) $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 4x + 3}$; $a = 3$, $a = 1$

9) $f(x) = \frac{1}{x(x - 3)}$; $a = 0$, $a = 3$

10) $f(x) = \frac{x^2}{x(x + 1)}$; $a = 0$, $a = -1$

11) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{(x - 1)^3}$; $a = 1$

12) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{(x - 1)^2}$; $a = 1$

13) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3 + 1}$; $a = +1 , a = -1$

14) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^4 - 16}$; $a = 2 , a = -2$

٢١ ـ ادرس تصرف الدوال الآتية عند $x = a$ المبينة

(1) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 6)^2}$; $a = 6$

(2) $f(x) = \dfrac{-5}{(x - 6)^3}$; $a = 6$

(3) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$; $a \to \infty$

(4) $f(x) = (\frac{1}{2})^{-x}$; $a \to -\infty$

الباب الرابع

التفاضــل

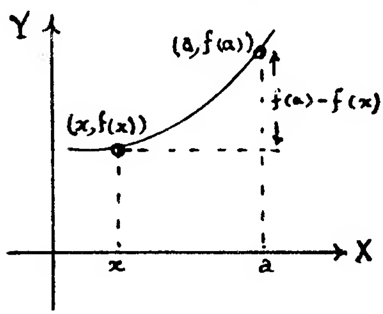
DIFFERENTIATION

بند ٤ ــ ١ ــ متوسط التغير للدالة :

The Average Rate of Increase of f (x) Per Unit Increase in (x)

لقد عرفنا فيما سبق أن الدالة التى تربط عناصر المجموعة « X » بعناصر المجموعة « Y » فى هذا الترتيب يمكن الرمز لها بالرمز $y = f(x)$ حيث $x \in X$ عبارة عن المتغير المستقل ، $y \in Y$ عبارة عن المتغير التابع .

فاذا اعتبرنا جسيما يتحرك فى خط مستقيم حيث « y » تمثل المسافة (بوحدة قياسية معينة) التى يقطعها الجسم من نقطة البداية فى زمن قدره « x » (فاذا كان الجسم ساقطا من السكون يكون لدينا $y = 16x^2$) فانه عندئذ يمكننا التعبير عن المسافة بدلالة الزمن فى صورة دالة $y = f(x)$. وهذا يعنى انه عند نهاية الزمن « x » يكون هذا الجسم قد قطع مسافة قدرها $f(x)$ وحدة قياسية .



شكل ٤ ــ ١ ــ ١

أما اذا زادت قيمة « x » حتى صارت « a » فان الجسم المتحرك يكون قد قطع مسافة مقدارها $f(a)$ وحدة قياسية . وهذا يعنى ان المسافة التى قطعت فى الفترة الزمنية $a - x$ هى المسافة $f(a) - f(x)$.

ومن هذا المثال البسيط يتبين لنا أنه اذا حدث أى تغير (مهما كان بسيطا) فى المتغير المستقل « x » يتبعه فورا تغيرا مناظرا فى المتغير التابع « y » وسيرمز للتغير فى « x » بالرمز (Δx) وتقرأ « دلتا x » وللتغير فى « y » بالرمز (Δy) وتقرأ « دلتا y » .

ولهذا فان التغير الذى طرأ على المتغير المستقل فى المثال السابق هو $\Delta x = a - x$ أما التغيير الذى حدث للمتغير التابع « y » فهو $\Delta y = f(a) - f(x)$. من هذا نتطرق الآن للتعريف التالى لمتوسط التغير لدالة .

٤ ـ ١ ـ ١ تعريف : متوسط التغير فى دالة :

اذا كانت $y = f(x)$ دالة وحدث تغير على المتغيرالمستقل « x » فيها . وكان هذا التغير من « x » الى « x_0 » فان متوسط التغير فى هذه الدالة هو :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

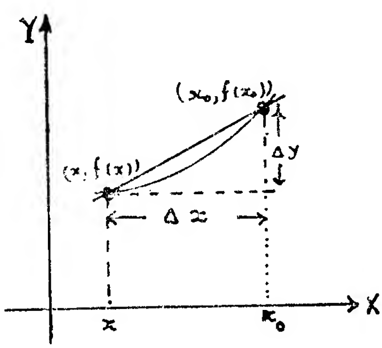
ولهذا فان المثال السابق يكون متوسط تغير المسافة وهو مايعرف بالسرعة المتوسطة للجسم المتحرك معطى من :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

اما المعنى الهندسى لمتوسط التغير فى دالة ما فما هو الا عبارة عن ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين

$(x, f(x))$, $(x_0, f(x_0))$

حسب مفهوم ميل الخط المستقيم (انظر تعريف ٢ ـ ٦ ـ ٤) وهذا المفهوم الهندسى يمكن توضيحه كما فى الشكل التالى (شكل ٤ـ١ـ٢) .



شكل ٤ ـ ١ ـ ٢

مثال (١) :

أوجد متوسط تغير الدالة $y = 16x^2$ فى الفترة من $x = 2$ الى $x = 4$

الحـل :

من التعريف للمتوسط وهو :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

فهنا $x_0 = 4 , x = 2$ فنجد أن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16\,(4)^2 - 16\,(2)^2}{4 - 2} = \frac{16\,(16 - 4)}{2} = 96$$

مثال (٢) :

أوجد متوسط تغير الدالة $y = x^2 + x + 1$ فى الفترة من $x = 1$ الى $x = 2$

الحـل :

سنتبع طريقة اخرى وهى أن نحدث تغيرا صفيرا فى « x » هـو « Δ x » فتصير قيمة الدالة هى $y + \Delta y$ المقابلة للقيمة $x + \Delta x$.

اى أن :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) + 1$$

وبطرح « y » من هذه القيمة تحصل على

$$\Delta y = 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + \Delta x$$

وحيث أن « Δ x » لاتساوى الصفر فانه يمكننا القسمة على « Δ x »
ونحصل على :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + (\Delta x) + 1$$

ولكن $x = 1 , \Delta x = 2 - 1 = 1$ فاننا نجد :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \times 1 + 1 + 1 = 2 + 2 = 4.$$

واما الطريقة المباشرة فان :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{(2)^2 + 2 + 1 - (1^2 + 1 + 1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{7 - 3}{1} = 4.$$

وهذه هى نفس النتيجة السابقة .

مثال (٣) :

قذفت كرة الى اعلى فقطعت مسافة قدرها $d = 64\,n - 16\,n^2$ حيث « n » عبارة عن الزمن بالثوانى « d » عبارة عن المسافة بالأقدام . اوجد السرعة المتوسطة للكرة .

١ ــ عندما يتغير الزمن من $n = 1$ الى $n = 1.1$

٢ ــ عندما يتغير الزمن من $n = 2$ الى $n = 2.1$

الحــل :

نحدث تغيرا فى « n » مقــداره « Δ n » فتكون قيمــة « d » عندما $(n + \Delta n)$ هى $d + \Delta d$

$$\therefore \quad d = 64\,n - 16\,n^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad d + \Delta d = 64\,(n + \Delta n) - 16\,(n + \Delta n)^2.$$

$$= 64\,n + 64\,(\Delta n) - 16\,(n^2 + 2\,n\,(\Delta n) + (\Delta n)^2) \qquad (2)$$

بطرح (١) من (٢) نحصل على :

$$\Delta d = 64\,(\Delta n) - 32\,n\,(\Delta n) - 16\,(\Delta n)^2$$

$$\Delta n \neq 0$$

$$\frac{\Delta d}{\Delta n} = 64 - 32\,(n) - 16\,(\Delta n)$$

وهذه هى عبارة عن معادلة السرعة المتوسطة للكرة . وللحصــــول على المطلوب يكون لدينا

(1) $\Delta n = 1.1 - 1 = 0.1 , n = 1 .$

$$\therefore \frac{\Delta d}{\Delta n} = 64 - 32 \times 1 - 16 (0.1) = 30.4.$$

بينما

(2) $\Delta n = 2.1 - 2 = 0.1 , n = 2 .$

$$\therefore \frac{\Delta d}{\Delta n} = 64 - 32 \times 2 - 16 (0.1) = - 1.6$$

ويمكن استخدام الطريقة المباشرة

في الحالة الأولى

$$\frac{\Delta d}{\Delta n} = \frac{d (1.1) - d (1)}{1.1 - 1}$$

$$= \frac{64 (1.1) - 16 (1.1)^2 - 64 \times 1 - 16 (1)^2}{1.1 - 1}$$

$$= (6.4 - 16 (0.21)) \times 10 = 30.4$$

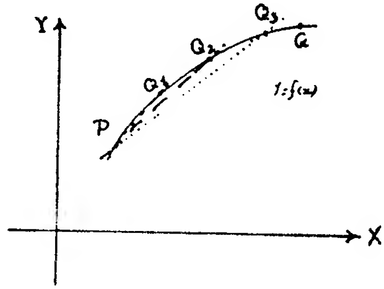
وبنفس الطريقة فى الحالة الثانية .

بند ٤ ــ ٢ : معدل تغير الدالة بالنسبة لمتغيرها المستقل :

Rate of change of f (x)

لقد درسنا فى بند ٤ ــ ١ متوسط التغير فى الدالة حيث عرفنا من المفهوم الهندسى له أنه لايعنى أكثر من ميل المستقيم الواصل بين نقطتين على منحنى هذه الدالة أما موضوعنا فى هذا البند فهو ايجاد ميل المماس لمنحنى هذه الدالة نفسه . ولذلك فمن المعقول جدا أن يكون المفهوم هنــا ايجاد ميل المستقيم الذى يمس ذلك المنحنى عند نقطة معينة . وهذا هو مانطلق عليه معدل تغير الدالة بالنسبة لمتغيرها المستقل .

والشكل التالى يوضح منحنى الدالة $y = f (x)$ حيث نفرض هنا أن المنحنى لايمثل خطا مســــتقيما وذلك لكى نتمكن من جعل الدراسة تأخذ شكلها العام . هـذا الشكل مشابه تماما للمثال الذى سقناه فى المقدمة فى بند ٣ ــ ١ نجد أن ميل المستقيمات PQ_3, PQ_2, PQ_1



شكل ٤ ــ ٢ ــ ١

غير متساوى . ولذلك اذا تخيلنا أن النقطة « Q » عبارة عن نقطة متحركة على مسار المنحنى متجهة نحو النقطة « P » التى سوف نعتبرها نقطة ثابتة فانه عندئذ نلاحظ أن ميل الخط المستقيم لايكون مقدارا ثابتا فى جميع الحالات نظرا لتحرك النقطة « Q » . وكذلك نلاحظ هنا أنه يمكن فى كل وضع من أوضاع « Q » حساب متوسط تغير الدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير المستقل (x) ذلك بايجاد خارج القسمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

مما سبق نرى أنه كلما اقتربت « Q » من « P » كلما صغرت قيمة « Δx » (سواء كانت موجبة أو سالبة) حتى تؤول الى الصفر وتبعا لهذا فان متوسط تغير الدالة يقترب من قيمة معينة هى القيمة التى تنتج من انطباق النقطة المتحركة « Q » على النقطة الثابتة « P » . وبهذا يصير الخط المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين فى هذه الحالة عبارة عن ممـــاس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ عند النقطة « P » .

٤ ــ ٢ ــ ١ تعريف : معدل تغير الدالة بالنسبة لمتغيرها المستقل :

معدل تغير الدالة $y = f(x)$ بالنسبة الى (x) هو نهاية متوسط تغير تلك الدالة عندما تؤول « Δx » الى الصفر ويرمز له بالرمز $\frac{dy}{dx}$

اى ان :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

مثال (١) :

اذا كانت $y = x^2$ فاننا نحصل على معدل التغير للدالة عنــدما $x = \frac{1}{2}$ كالتالى :

$$\therefore \quad y = x^2$$

تحدث تغيرا فى « x » لتصبح $x + \Delta x$ فتتغير قيمة الدالة « y » فى هذه الحالة الى $y + \Delta y$

$$\therefore \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

ومن المعادلتين الأخيرتين نحصل على :

$$\Delta y = \Delta x (2x + \Delta x)$$

وبالقسمة على Δx (حيث $\Delta x \neq 0$) نجد أن :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x.$$

وعليه يكون معدل تغير الدالة عندما $x = \frac{1}{2}$ هو

$$\left\{\frac{dy}{dx}\right\}_{x = \frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

وهو يمثل ميل المماس لمنحنى الدالة $y = x^2$ عند النقطة $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$ وتكون معادلة المماس فى هذه الحالة

$$y - \frac{1}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right). \qquad \therefore \quad 4y - 4x = -1.$$

مثال (٢) :

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يمس منحنى الدالة $y = 2x - 3$ عندما $x = 1$. $x = 2$, $x = 3$, $x = k$ حيث « k » مقدار ثابت

الحـل :

بنفس الطريقة نعطى « x » تغيرا بسيطا هو « Δx » وليكن التغير فى « y » هـو « Δy » ونجد :

$$\because \quad y = 2x - 3 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad y + \Delta y = 2(x + \Delta x) - 3 \qquad (2)$$

وبالطرح نجد : $\Delta y = 2(\Delta x)$

وحيث $\Delta x \neq 0$. بالقسمة على « « Δx » » نجد أن $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

وهذا هو ميل منحنى الدالة $y = 2x - 3$ وهو عبارة عن مقدار ثابت ويساوى (٢) مهما اختلفت قيمة « x » وهذا أمر واقعى نظرا لأن منحنى الدالة عبارة عن خط مستقيم .

بند ٤ ـ ٣ المعامل التفاضلى الأول (المشتقة الأولى) :

٤ ـ ٣ ـ ١ تعريف : المشتقة الأولى :

اذا أمكن ايجاد النهاية

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

فانها تسمى مشتقة الدالة $y = f(x)$ الأولى عند $x = a$.

وبطريقة اخرى

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

يعنى تفاضل الدالة أو المشتقة الأولى للدالة $f(x)$. وبهذا فان

$\frac{dy}{dx}$ ماهى الا طريقة لايجاد المشتقة الأولى للدالة . اى انه اذا اردنا ان تفاضل « y » بالنسبة الى « x » فاننا نوجد $\frac{dy}{dx}$. ويمكن النظر الى $\frac{dy}{dx}$ على انها دالة جديدة للمتغير المستقل « x » ويرمز لها باحدى الرموز التالية $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y'

ومن باب النهايات فانه اذا كانت $f(x)$ معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فان $f'(x)$ يمكن تعريفها على الفترة المفتوحة (a, b) فقط.

يمكننا ان نلاحظ الآن العلاقة التى تربط بين البندين ٤–٢ ، ٤–٣ . فالمشتقة الأولى لدالة معنة ماهى الا ميل الخط المستقيم الذى يمس منحنى هذه الدالة عند نقطة معينة . وهذا هو التفسير الهندسى للمشتقة الأولى .

كذلك يمكن تلخيص عملية ايجا دالمشتقة الأولى لدالة معينة فى أربع خطوات وهذه الخطوات قد بيناها فى المثالين ١ ، ٢ من بند ٤–٢ . وسنوضحها فيما يلى من أمثلة :

مثال (١) :

المشتقة الأولى للدالة $y = x^2$ هى $y' = 2x$

انظر الى المثال (١) فى بند ٤ — ٢ .

وكذلك المشتقة الأولى للدالة $f(x) = 2x - 3$ هو $f'(x) = 2$

انظر مثال (٢) فى بند ٤ — ٢ .

مثـال (٢) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = 4x^2$

الحـل :

سنوضح هاهنا الخطوات الأربعة : ففى الخطوة الأولى نجعل « x » تصبح « $x + \Delta x$ » فتتغير « y » الى $y + \Delta y$ ونجد

$$y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^2 = 4x^2 + 8x(\Delta x) + 4(\Delta x)^2$$

الخطوة الثانية : نوجد « Δy » بدلالة « $x , \Delta x$ » فنجد أن

$$\Delta y = 8x(\Delta x) + 4(\Delta x)^2$$

الخطوة الثالثة : نوجد متوسط تغير الدالة وذلك بالقسمة على « Δx » (حيث $\Delta x \neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8x + 4(\Delta x)$$

الخطوة الرابعة : نوجد معدل التغير وذلك بايجاد $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ونحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4(\Delta x)) = 8x$$

وهذا يعنى أن المشتقة الأولى للدالة $y = 4x^2$ هى $y' = 8x$.

بند ٤ ــ ٤ : قواعد التفاضل :

٤ ــ ٤ ــ ١ القاعدة الأولى :

اذا كانت $y = cx^n$ حيث « c » ثابت فان $y' = cn\,x^{n-1}$

البرهان :

نحدث تغيرا فى « x » فتصبح $x + \Delta x$ فتتغير « y » الى $y + \Delta y$ وعليه يكون :

$$y + \Delta y = c(x + \Delta x)^n$$

ومن ثم نجد أن :

$$\Delta y = c(x + \Delta x)^n - c^{xn}$$

وباستخدام قاعدة النهايات $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ التى قدمنـا لها

فى الباب الســــــابق حيث « n » موجب أو سالب صحيح أو كسرى .
فنحصل على :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}$$

وعند اخذ النهاية للطرفين نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x + \Delta x \to x} c \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}$$

$$= c\ (n\ x^{n-1}) = n\ c\ x^{n-1}$$

مثال (١) :

اذا كانت $f(x) = 3x^4$ فان المشتقة الاولى لها هى :

$$f'(x) = 3 \times 4\ x^{4-1} = 12\ x^3$$

مثال (٢) :

اذا كانت $f(x) = \frac{1}{5} x^5$ فان المشتقة الأولى هى :

$$f'(x) = \frac{1}{5} .\ 5\ x^{5-1} = x^4.$$

نتــائج :

١ ـ المشــــــتقة الأولى لأى مقدار ثابت تساوى صفر أى اذا كانت $f(x) = k$ حيث « k » مقدار ثابت فان $f'(x) = 0$

وبرهان ذلك بأن نضع $n = 0$ فى القاعدة السابقة فنحصـــــل على النتيجة .

٢ ـ اذا كانت $f(x) = x^n$ فان $f'(x) = nx^{n-1}$

وبرهان ذلك بأن نضع $c = 1$ فى القاعدة السابقة .

مثال (٣) :

اذا كانت $f(x) = k_1$ حيث $k_1 = 2,\ 0.009\ ,\ 6543.92$

فلجميع هذه القيم فان : $f'(x) = 0.$

٤ ـ ٤ ـ ٢ ـ القاعدة الثانية :

تفاضل حاصل جمع دالتين او اكثر يساوى حاصل جمع تفاضلها .
اى ان :

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

البرهان :

نفرض ان كل من $f(x)$, $g(x)$ عبارة عن دالتين للمتغير المستقل « x » تحدث تغيرا فى « x » مقـداره « Δx » فيحدث عندئذ تغير مناظر فى $f(x)$ هــو $\Delta f(x)$ وفى $g(x)$ مقداره $\Delta g(x)$ وينتج لدينا

$$y + \Delta y = (f(x) + \Delta f(x) + g(x) + \Delta g(x))$$

وبطرح $y = g(x) + f(x)$ من المعادلة السابقة نحصل على :

$$\Delta y = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

وبالقسـمة على « Δx » ينتج ان :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x) + \Delta g(x)}{\Delta x}$$

وبأخذ النهاية نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{d f(x)}{dx} + \frac{d g(x)}{dx}$$

مثـــال (٤) :

$$\frac{d}{dx}(3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^4) + \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$= 12x^3 + 15x^2 + 6x + 2 + 0.$$

وكذلك

$$\frac{d}{dx}(10\sqrt{x} + \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2})$$

$$= \frac{d}{dx}(10x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(5x^{-1}) + \frac{d}{dx}(8x^{-2})$$

$$= 10(\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) + 5(-1x^{-2}) + 8(-2x^{-3})$$

$$= \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{x^2} - \frac{16}{x^3} = \frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} - \frac{16}{x^3}$$

بينما نجد :

$$\frac{d}{dx}(3\sqrt[3]{x} + 4/\sqrt[4]{x})$$

$$= \frac{d}{dx}(3\sqrt[3]{x} + 4x^{-\frac{1}{4}})$$

$$= 3\,(1/3\, x^{1/3-1}) + 4\,(\tfrac{1}{4}\, x^{-\frac{1}{4}-1}) = x^{-2/3} - x^{-5/4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$$

٤ ـ ٤ ـ ٣ ـ القاعدة الثالثة :

تفاضل باقى طرح دالتين يساوى باقى طرح تفاضل كل منهما . أى انه

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) - g(x)\right) = \frac{d\,f(x)}{dx} - \frac{d\,g(x)}{dx}$$

مثال (٥) :

$$\frac{d}{dx}(3x^3 - 4x^2 - 5x + 9)$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^3) - \frac{d}{dx}(4x^2) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(9)$$

$$= 9x^2 - 8x - 5 + 0$$

٤ ـ ٤ ـ ٤ ـ القاعدة الرابعة :

تفاضل حاصل ضرب دالتين يساوى الدالة الأولى × تفاضل الدالة الثانية + الدالة الثانية × تفاضل الدالة الأولى. أى انه :

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f(x) \cdot \frac{d\,g(x)}{dx} + g(x) \cdot \frac{d\,f(x)}{dx}$$

البرهان :

اذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين للمتغير المستقل « x » واحدثتا تغيرا فى « x » صارت $x + \Delta x$ فان $f(x)$ تصبح $f + \Delta f$. وكذلك $g(x)$ تصبح $g + \Delta g$

ومن ثم تصبح $y = f(x) \times g(x)$ فى هذه الحالة .

$$y + \Delta y = (f + \Delta f)(g + \Delta g) = f \cdot g + f(\Delta g) + g(\Delta f) + (\Delta f)(\Delta g).$$

$$\therefore \quad \Delta y = f(x) \cdot (\Delta g(x)) + g(x) \cdot (\Delta f(x)) + (\Delta f) \cdot (\Delta g)$$

ومن ثم نجد ان المتوسط هو :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)(\Delta g)$$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ فاننا نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g(x) .$$

مثـال (٦) :

$$\frac{d}{dx}\{(3x^3 - x^2)(x^2 + 2x - 3)\}$$

$$= (3x^3 - x^2)(2x + 2) + (9x^2 - 2x)(x^2 + 2x - 3)$$

مثـال (٧) :

$$\frac{d}{dxx}(x^3 \cdot x^4) = 3x^2 \cdot x^4 + x^3 \cdot (4x^3) = 3x^6 + 4x^6 = 7x^6$$

يمكن استخدام القاعدة الأولى مباشرة .

٤ ـ ٤ ـ ٥ ـ القاعدة الخامسة :

اذا كانت :

$$H(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ فان } H'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$

ونترك برهان هذه القاعدة للقارىء .

مثـال (٨) :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3 - x^3}{x}\right) = \frac{x(-3x^2) - (3 - x^3) \cdot 1}{x^2}$$

$$= -\frac{(2x^3 + 3)}{x^2} \cdot = -2x - \frac{3}{x^2}$$

او بطريقة اخرى وهى :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x} - x^2\right) = 3\frac{d}{dx}(x^{-1}) - 2x = -3x^{-2} - 2x$$

٤ ـ ٤ ـ ٦ ـ القاعدة السادسة :

اذا كانت $y = f(w)$, $w = g(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$

ويعرف بقانون التسلسل « chain rule » وهو يسهل عمليات التفاضل للمقادير الجبرية المعقدة . وسنسوق الآن مثالا

مثـال (٩) :

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = (3x^2 - 5)^4$.

الحـل :

نفرض أن $w = 3x^2 - 5$ ومن ثم يكون $y = w^4$

وبتطبيق القاعدة السابقة نجد ان :

$$\frac{dy}{dw} = 4w^3 , \qquad \frac{dx}{dw} = 6x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4w^3(6x) = 24(3x^2 - 5)^3 \cdot x.$$

والطريقة هى أن نعامل القوس كأنه هو المتغير ونفاضله ثم نضرب فى تفاضل ما بداخل القوس .

نتيجة هامة :

اذا كانت « f » هى الدالة العكسية للدالة « g » اى أن $f(g(x)) = x$ فباستخدام القاعدة نجد :

$$1 = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad \therefore \quad 1 = \frac{dx}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \therefore \quad \frac{dg}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dg}$$

بند ٤ ــ ٥ ــ الدوال الضمنية وتفاضلها :

Implicit functions and Their Derivatives

٤ ــ ٥ ــ ١ تعريف الدالة الضمنية : Implicit function

اذا كانت « f » عبـارة عن دالة تربط عنـاصر الفئة « X » بعناصر الفئة « Y » وكان هذا الترابط فى صـورة معادلة غير محلولة بالنسبة للمتغير « y » (اى ان معلوماتنا لاتساعدنا على ايجاد قيمة « y » بدلالة « x » فان الدالة « f » تسمى فى هذه الحالة « دالة ضمنية » .

أما اذا أمكننا وضع « y » بدلالة « x » تسـمى الدالة حينئذ « دالة صريحة » وفى بعض الأحيان يمكن تحويل الدالة الضمنية الى دالة صريحة .

مثـال (١) :

$F(x, y) = 0$	$y = f(x)$	$x = g(y)$
$3x + 4y - 12 = 0$	$y = \dfrac{12 - 3x}{4}$	$x = \dfrac{12 - 4y}{3}$
$xy - x^2 + 1 = 0$	$y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$	$x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$	$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$	$x = \pm\sqrt{1 - y^2}$.

ونلاحظ هنا أننا قد حصلنا على علاقات وليست دوال وسوف نبحث الطريقة التى نفاضل بها مثل هذا النوع من الدوال عن طريق الأمثلة التالية :

مثـال (٢) :

أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $4x^2 + 9y^2 = 36$

الحـل :

بالطبع يمكننا ايجاد « y » صريحة فى « x » ولكننا سنطبق اسلوب تفاضل الدالة الضمنية وهو أن نفاضل طرفى هذه المعادلة .

$$\therefore \quad 8x + 18y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{8x}{18y} = - \frac{4x}{9y}.$$

مثـال (٣) :

اذا كانت $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ فأوجد y

الحـل :

بتفاضل طرفى المعادلة نحصل على :

$$2(x - 1) . 1 + 2(y - 2) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - 1}{2 - y}$$

مثـال (٤) :

اذا كانت $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 24 = 0$

فبتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة الى « x » نجد أن :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 8 + 8 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad (2x - 8) + (2y + 8)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4 - x}{4 + y}$$

مثـال (٥) :

اذا كانت $x^2 + y^5 = 10$

فبتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة الى « x » نجد أن :

$$2x + 5y^4 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{5y^4}.$$

مثـال (٦)

اذا كانت $(1 + 2x + x^2)\, y^3 + 2y^2 x^2 + y - x = 23$

فانه بتفاضل طرفى المعادلة نحصل على :

$$(1 + 2x + x^2)\left(3y^2 \frac{dy}{dx}\right) + y^3 (2 + 2x) + 2y^2 (2x) +$$

$$+ 2x^2 \left(2y \frac{dy}{dx}\right) + \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}\{3y^2 (1 + 2x + x^2) + 4x^2 y + 1\}$$

$$= -\{2y^3 (1 + x) + 4y^2 x - 1\}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\{2(1 + x)\cdot y^3 + 4y^2 x - 1\}$$

$$\{3y^2 (1 + 2x + x^2) + 4x^2 y + 1\}^{-1}.$$

بند ٤ ـ ٦ ـ تفاضل الدوال الدائرية :

Differentiation of circular (trignometric) fns.

فى هذا البند سنتعرض للمشـــــتقات الأولى للدوال الدائرية التى تعرضنا لتعريفها فى بند ٢ ـ ٥ .

٤ ـ ٦ ـ ١ نظرية (١) :

اذا كانت $y = \sin x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

البرهان :

من تعريف التفاضل للدالة $f(x)$ أى

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\therefore \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

لجميع قيم « x » حيث $x \neq x_0$. ولكن

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \cdot \cos \left(\frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{x - x_0}{2}\right) .$$

ومنه ينتج أن :

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \cdot \frac{\sin \left\{ \frac{x - x_0}{2} \right\}}{x - x_0}$$

وباستخدام نظريات النهايات فى الباب الثالث نجد أن :

$$y' = \cos x$$

مثـــال (١) :

اذا كانت $y = 8 \sin x$ فان $y' = 8 \cos x.$

مثـال (٢) :

اذا كانت $y = 5 \sin (3x^2)$

فيمكننا كتابة $u = 3x^2$ فيكون $y = 5 \sin u$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5 (\cos u) \cdot (3 \times 2x)$$

$$= 30 (x) \cos (3x^2)$$

أو باستخدام القاعدة بدون اللجوء الى « u »

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 5 (\cos (3x^2)) (3 \times 2x) = 30 x \cos (3x^2).$$

٤ ـ ٦ ـ ٢ نظرية (٢) :

اذا كانت $y = \cos x$ فان $y' = - \sin x.$

البرهان :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos (x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

ولكن $\cos (x + \Delta x) = \cos x \cos (\Delta x) - \sin x \sin (\Delta x)$

ومع ملاحظة ان :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos (\Delta x)}{\Delta x} = 0 ,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

فاننا نجد المطلوب اى $y' = - \sin x.$

مثـال (٣) :

اذا كان $y = 5 \cos x$ فان $y' = - 5 \sin x.$

مثـــال (٤) :

اذا كان $y = 5 \cos (3x^2)$ فان

$$y' = -5 \sin (3x^2)\ (3 \times 2x)$$
$$= -30\ .\ (x)\ .\ \sin (3x^2).$$

مثـــال (٥):

أوجد تفاضل الدالة $y = \tan x.$

الحـــل :

من تعريف الدالة نجد أن :

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

وباستخدام القاعدة الخامسة نجد أن :

$$y' = \frac{(\cos x)\dfrac{d(\sin x)}{dx} - (\sin x)\dfrac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{(\cos x)\ (\cos x) - (\sin x)\ (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

بند ٤ ـ ٧ ـ تفاضل معكوس الدوال الدائرية (المثلثية) :

Differentiation of Inverse circular functions

فى هذا البند نتعرض للمشتقات الأولى للدوال الدائرية العكسية . ونستخدم فى ايجاد تفاضلات الدوال العكسية النتيجة التى أثبتناها وهى (راجع ٤ ـ ٤ ـ ٦) .

$$\frac{dy}{dx} = 1 / \left(\frac{dx}{dy}\right)$$

٤ ــ ٧ ــ ١ نظرية (١) :

اذا كانت $y = \sin^{-1} x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (|x| < 1).$$

البرهان :

من تعريف الدالة العكسية اذا كان $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$ فان

$$x = \sin y \qquad |x| < 1 , 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

باستخدام النظرية (٤ ــ ٦ ــ ١) نجد انه بتفاضل طرفى المعادلة الأخيرة

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} .$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

حيث : $|x| < 1$.

مثال (١) :

اذا كانت $y = 5 \sin^{-1} x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

مثال (٢) :

اذا كانت $y = 5 \sin^{-1} 3 x^2$ فان

5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{\sqrt{1 - (3x^2)^2}} \cdot (3 \times 2x) = \frac{30x}{\sqrt{1 - 9x^4}}$$

مثـــال (٣) :

اذا كانت $y = \sin^{-1} \frac{x}{2}$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2}x)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

٤ ــ ٧ ــ ٢ نظرية (٢) :

اذا كان $y = \cos^{-1} x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (|x| < 1)$$

البرهان :

على غرار البرهان فى النظرية السابقة . ولذا نتركه للقارىء كتمرين

مثـــال (٤) :

اذا كان $y = 5\cos^{-1} x$ فان $y' = -\frac{5}{\sqrt{1 - x^2}}$

مثـــال (٥) :

اذا كان $y = 5\cos^{-1}(3x^2)$ فان

$$y' = \frac{-5}{\sqrt{1 - (3x^2)^2}} (3 \times 2x) = \frac{-30x}{\sqrt{1 - 9x^4}}$$

مثـــال (٦) :

اذا كان $y = \cos^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ فان

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(x/3)^2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$$

٤ ـ ٧ ـ ٣ نظرية (٣) :

اذا كان $y = \tan^{-1} x$ فان

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \ (x \in R)$$

البرهان :

من تعريف الدالة العكسية اذا كان $y = \arctan x$

فان $x = \tan y$

وباجراء التفاضل واستخدام نتيجة المثال ٥ فى بند (٤ ـ ٦) نحصل على :

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y) \frac{dy}{dx}$$

ومنها نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \ (x \in R).$$

وهو المطلوب اثباته

وعلى نفس النمط السابق وباستخدام أن

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

نجد أن برهان النظرية التالية بسيط جدا

٤ ـ ٧ ـ ٤ نظرية (٤) :

اذا كانت $y = \operatorname{arccot} x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

اما النظرية التالية فتعتمد على اثبات ان :

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

واثبات هذا بسيط باستخدام القاعدة الخامسة فى التفاضل حيث :

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{(\cos x)(0) - 1(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{(\cos x)^2} = \left(\frac{1}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \sec x \tan x$$

ومن ثم نجد ان :

٤ ـ ٧ ـ ٥ ـ نظرية (٥) :

اذا كانت $y = \text{arcsec } x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (|x| > 1)$$

البرهان :

$\because \quad y = \sec^{-1} x \qquad \therefore \quad x = \sec y$

بالتفاضـــل

$$\therefore \quad 1 = \sec y \cdot \tan y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad (|x| > 1).$$

٤ ـ ٧ ـ ٦ نظرية (٦) :

اذا كانت $y = \csc^{-1} x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad (|x| > 1).$$

وبرهان هذه النظرية على نفس المنهج الذى اتبع فى النظريات السابقة

البند ٤ ـ ٨ تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية :

Differentiation of Exponential and logarithmic functions

سنتعرض فى هذا البحث لتفاضل الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية ونبدأ أولا بالدالة الأسية .

أولا ـ تفاضل الدالة الأسية $y = e^x$:

٤ ـ ٨ ـ ١ نظرية (١) :

اذا كانت $y = e^x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

البرهان :

لنفرض أن

$$y = e^x \qquad (1)$$

تحدث تغيرا فى « x » فتصبح $x + \Delta x$ فتتغير « y » الى $y + \Delta y$ وينتج

$$y + \Delta y = e^{x + \Delta x} \qquad (2)$$

وبطرح (١) من (٢) نحصل على :

$$\Delta y = e^{x + \Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1)$$

حيث « Δ x » لاتساوى صفرا فنجد بعد القسمة على « Δ x » وبأخذ النهايات وملاحظة أن :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

فنجد ان :

$$\frac{dy}{dx} = e^x \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

وهو المطلوب اثباته

اما اذا كانت $y = e^u$ حيث « u » دالة فى « x » فان :

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx} .$$

مثال (١) :

اذا كانت $y = e^{x^2 - 3x - 1}$ فان

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2 - 3x - 1} \cdot (2x - 3).$$

مثال (٢) :

اذا كانت $y = e^{(x^2 + 3x - 1)^5}$ فان

$$\frac{dy}{dx} = e^{(x^2 + 3x - 1)^5} \left(5 \cdot (x^2 + 3x - 1)^4\right) \cdot (2x + 3))$$

$$= 5 (2x + 3) (x^2 + 3x - 1)^4 e^{(x^2 + 3x - 1)^5}.$$

مثال (٣) :

اذا كانت $y = e^{\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^7}$ فان

$$\frac{dy}{dx} = e^{\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^7} \cdot 7 \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^6 \cdot \frac{(x + 1) \cdot 1 - (x - 1) \cdot 1}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{14}{(x+1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^6 e^{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

مثـال (٤) :

اذا كانت $y = e^{x \sin x}$ فان

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \sin x} \quad (x \cos x + \sin x).$$

مثـال (٥) :

اذا كانت $y = e^{x^2} . \tan x^3$ فان

$$\frac{dy}{dx} = (\tan x^3) . e^{x^2} (2 x) . + e^{x^2} (Sec^2 x^3) . (3 x^2).$$

$$= e^{x^2} \{ 2 x (\tan x^3) + (3 x^2) . (\sec^2 x^3) \} .$$

مثـال (٦) :

اذا كانت $y = e^{x \arcsin x}$ فان

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \arcsin x} \quad \{ \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + \sin^{-1} x \} .$$

ثانيا ــ تفاضل الدالة اللوغاريتمية :

٤ ــ ٨ ــ ٣ نظرية (٢) :

اذا كانت $y = \ln x$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

البرهان :

بما أن $y = \ln x$ فان $x = e^y$. ومن ثم نجد أن :

$$\frac{dx}{dy} = e^y. \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

وذلك باستخدام نتيجة القاعدة السادسة .

ومن ثم نحصل على المطلوب وهو :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} .$$

أما اذا كانت $y = \ln (u)$ حيث « u » دالة فى « x » فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} .$$

مثـال (٦) :

اذا كانت $y = 5 \ln (x^2 + 1)^3$ فان

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^3} \cdot 3 (x^2 + 1)^2 \cdot (2 x)$$

$$= \frac{30 (x)}{(x^2 + 1)}$$

لاحظ انه يمكن استخدام خواص اللوغاريتمات فى تبسيط المقدار أولا

٤ ــ ٨ ــ ٣ نظرية (٣) :

اذا كانت $y = \log_a x$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$

البرهان :

من قوانين تغيير أساس اللوغاريتمات (انظر بند ٣ ــ ٥) نستطيع كتابة $\log_a x = \log_e x \cdot \log_a e = \log_a e \cdot \ln x$

حيث $\log_a e$ مقدار ثابت . وبأخذ تفاضل طرفى المعادلة الأخـــيرة نحصـــل على :

$$\frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e .$$

واذا كانت $y = \log_a u$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \log_a e \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثــال (٧) :

اذا كانت $y = \log_{10} (x^2 + x + 1)$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + x + 1} (2x + 1) \cdot \log_{10} e \cdot =$$

$$\left\{ \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \right\} \log_{10} e$$

مثــال (٨) :

اذا كانت $y = \ln (\text{Sec } x + \tan x)$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x + \sec x} \cdot (\sec^2 x + \sec x \tan x)$$

$$= \frac{\sec x \, (\sec x + \tan x)}{\tan x + \sec x} = \sec x.$$

مثــال (٩) :

اذا كانت $y = \ln (\sec x)$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \tan x = \tan x$$

مثــال (١٠) :

اذا كانت $y = \ln (\sin x)$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x.$$

٤ ـ ٨ ـ ٤ التفاضل اللوغاريتمى :

فى بعض الأحيان قد نضطر الى استخدام اللوغاريتمات وذلك لتسهيل عمليات التفاضل . وتوجد حالتان خاصتان يكون استخدام اللوغاريتمات فيها ذ' فائدة عظمى .

الحالة الأولى :

الدوال التى على الصورة $y = u^{v}$ حيث كل من u , v دوال فى « x » . فلاجرا التفاضل نأخذ اللوغاريتمات فنجد :

$$\ln y = \ln (u^{v}) = (v) \ln u$$

ثم نجرى التفاضل بعد ذلك . وسنسوق الآن بعض الأمثلة .

مثـال (١١) :

اذا كانت $y = x^{x}$ فأوجد « y' »

الحـل :

نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد أن :

$$\ln y = \ln x^{x} = x (\ln x)$$

وبتفاضل طرفى المعادلة نحصل على :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = (1 + \ln x).$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y (1 + \ln x) = (1 + \ln x) x^{x}.$$

مثـال (١٢) :

اذا كانت $y = x^{\sin x}$ فأوجد « y' »

الحـل :

بأخذ اللوغاريتم فنجد أن :

$$\ln y = \ln (x^{\sin x}) = \sin x (\ln x)$$

وباجراء التفاضل نجد :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\cos x)(\ln x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^{\sin x})\left\{\frac{\sin x}{x} + (\cos x)(\ln x)\right\}.$$

الحالة الثانية :

قد يصعب فى بعض الأحيان اجراء التفاضل باستخدام قواعد الضرب والقسمة . ونجد انه من الأسهل والأجدى أن نستخدم التفاضل اللوغاريتمى . ونسوق المثال التالى كبيان لذلك :

مثل (١٣) :

اذا كان
$$y = \frac{(x^2+1)^3 \cdot (x^2-1)^5}{(2x^2+1)^4 \cdot (x^3+x+1)^8}$$

يمكننا اجراء التفاضل باستخدام قاعدة القسمة ولكن بلا شك ستكون معقدة . ولذلك سنستخدم طريقة التفاضل اللوغاريتمى بأخذ اللوغاريتمات فنجد :

$$\ln y = \ln (x^2+1)^3 + \ln (x^2-1)^5 - \ln (2x^2+1)^4$$
$$- \ln (x^2+x+1)^8$$
$$= 3 \ln (x^2+1) + 5 \ln (x^2-1) - 4 \ln (2x^2+1)$$
$$- 8 \ln (x^2+x+1)$$

وباجراء التفاضل نحصل على :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dy} = \frac{3(2x)}{x^2+1} + \frac{5}{x^2-1}(2x) -$$
$$- \frac{4}{2x^2+1}(4x) - \frac{8(2x+1)}{x^2+x+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dy} = y \left\{ \frac{6x}{x^2+1} + \frac{10x}{x^2-1} - \frac{16x}{2x^2+1} - \frac{8(2x+1)}{x^2+x+1} \right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)^3 (x^2-1)^5}{(2x^2+1)^4 (x^2+x+1)^8} \left[\frac{6x}{x^2+1} + \frac{10x}{x^2-1} - \frac{16x}{2x^2+1} - \frac{8(2x+1)}{x^2+x+1} \right]$$

بند ٤ ـ ٩ ـ المشتقات العليا Higher Derivatives :

اذا كانت $y = f(x)$ دالة متصلة وقابلة للتفاضل فان المشـتقة الأولى (المعامل التفاضلى الأول) لها يعتبر بحد ذاته دالة اخرى ، المتغير المستقل فيها ايضا هو « x » اى ان $f'(x)$ تعتبر بحد ذاتها دالة فى المتغير « x » فاذا كانت هذه الدالة قابلة للتفاضل فانه باسـتطاعتنا ايجاد تفاضل الدالة الأخيرة ونرمز للناتج بأحد الرموز التالية :

$$y^{(2)} , y'' , f''(x) , f^{(2)}(x) , \frac{d^2f}{dx^2} .$$

٤ ـ ٨ ـ ١ تعريف : المشتقة الثانية :

اذا كانت $y = f(x)$ فان المشتقة الثانية لها تعرف كالتالى :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right)$$

وعموما يمكننا تعريف المشتقة النونية

٤ ـ ٨ ـ ٢ تعريف المشتقة النونية :

اذا كانت $y = f(x)$ فان المشتقة النونية لها تعرف كما يلى :

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(f(x))\right).$$

مثـال (١) :

اذا كانت $f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 7x^2 - x - 1$ فأوجد

$f^{(5)}, f^4, f^3, f^2, f^1$

الحـل :

$f'(x) = 3(4x^3) - 5(3x^2) - 7(2x) - 1$

$f''(x) = f^{(2)}(x) = 12(3x^2) - 15(2x) - 14(1) = 36x^2 - 30x - 14$

$f^{(3)}(x) = 36(2x) - 30 . (1) = 72x - 30$

$f^{(4)}(x) = 72 - 0 = 72$

$f^{(5)}(x) = 0$

وكذلك المشتقات العليا لهذه الدالة التى هى أعلى من الخامسة كلها صفرية .

مثـال (٢) :

اذا كان $y = \sin x$ فأوجد $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots$

الحـل :

$y = \sin x \qquad \therefore y^{(1)} = \cos x$

$\therefore y^{(2)} = -\sin x = -y \qquad \therefore y^{(3)} = -\cos x$

$\therefore y^{(4)} = \sin x = y \qquad \therefore y^{(5)} = y' = \cos x$

ومن الواضح أن $y^{(4n)} = y$ حيث « n » عدد صحيح موجب .

بند ٤ ــ ١٠ ملخص قواعد وقوانين ونظريات التفاضل :

1) $$\frac{d\,f(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2) $$\frac{d}{dx}(C) = 0$$ حيث « C » مقدار ثابت

3) $\dfrac{d}{dx}(C\,x) = C.$

4) $\dfrac{d}{dx}(C\,x^n) = n\,C\,x^{n-1}$

5) $\dfrac{d}{dx}(U \pm V \pm W \pm \ldots\ldots) = \dfrac{dU}{dx} \pm \dfrac{dV}{dx} \pm \dfrac{dW}{dx} \pm \ldots.$

6) $\dfrac{d}{dx}(Cu) = C\,\dfrac{dU}{dx}.$

7) $\dfrac{d}{dx}(U.\,V) = U.\dfrac{dV}{dx} + V\,\dfrac{dU}{dx}$

8) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{V\,\dfrac{dU}{dx} - U\,\dfrac{dV}{dx}}{V^2}$

9) $\dfrac{d}{dx}(U^n) = n\,U^{n-1}\,\dfrac{dU}{dx}.$

10) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\,.\,\dfrac{du}{dx}.$

11) $\dfrac{dy}{dx} = 1 \,/\, \left(\dfrac{dx}{dy}\right)$

12) $\dfrac{d}{dx}(\sin u) = (\cos u) \cdot \dfrac{du}{dx}$

13) $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -(\sin u) \cdot \dfrac{du}{dx}$.

14) $\dfrac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \cdot \dfrac{du}{dx} = (1 + \tan^2 u)\dfrac{du}{dx}$

15) $\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \cdot \dfrac{du}{dx} = -(1 + \cot^2 u) \cdot \dfrac{du}{dx}$

16) $\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u . \tan u . \dfrac{du}{dx}$

17) $\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u . \cot u . \dfrac{du}{dx}$.

18) $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \dfrac{du}{dx} \quad (|u| < 1)$

19) $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx} \quad (|u| < 1)$

20) $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \dfrac{1}{1+u^2} \dfrac{du}{dx} \quad (u \in R)$

21) $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = \dfrac{-1}{1+u^2} \dfrac{du}{dx} \quad (u \in R)$

22) $$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{dx} \quad (|u| > 1)$$

23) $$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{dx} \quad (|u| > 1)$$

24) $$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

25) $$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u} \cdot (\log_a e) \cdot \frac{du}{dx}$$

26) $$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

27) $$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot (\ln a) \cdot \frac{du}{dx}$$

28) $$\frac{d}{dx}(u^v) = \frac{d}{dx}(e^{v \ln u})$$

$$= e^{v \ln u} \frac{d}{dx}(v \ln u)$$

$$= e^{v \ln u} \left(v.\frac{1}{u}\,\frac{du}{dx} + (\ln u)\,\frac{dv}{dx}\right)$$

$$= u^v \left(\frac{v}{u}\,\frac{du}{dx} + (\ln u).\,\frac{dv}{dx}\right).$$

29) $$y^{(2)} = y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

30) $$y^{(3)} = f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{x}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

31) $$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)\right).$$

تمـــارين

بند ٤ ـ ١١

١ ـ أوجد متوسط تغير الدالة التالية حسب التغير الذى يطرأ على « x » والموضح أمام كل دالة .

i $f(x) = 16x^2$ عندما تتغير x (3) ← (5)

ii $f(x) = x^2 - 6x$ عندما تتغير " (—1) " (4)

iii $f(x) = -\frac{1}{2}x - 6$ عندما تتغير " (—7) " (—3)

iv $f(x) = mx + b$ عندما تتغير " (—2) " (0)

v $f(x) = 3$ عندما تتغير " (0) " (1)

vi $f(x) = 2x^2 + x^8$ عندما تتغير " (—1) " (0)

vii $f(x) = x^3$ عندما تتغير " (—1) " (0)

viii $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ عندما تتغير " (0) " (2)

ix $f(x) = 2x - 5$ عندما تتغير " (4) " (5)

x $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$ عندما تتغير " (—5) " (—2)

xi $f(x) = (x - 1)^{\frac{1}{2}}$ عندما تتغير " (+5) " (2)

xii $f(x) = 1/(x^2 - x - 1)$ عندما تتغير " (—5) " (0)

xii $f(x) = \frac{2}{x} - 10$ عندما تتغير " (—2) " (1)

xiv $f(x) = \frac{1}{x^2} - x$ عندما تتغير " (3) " (10)

xv $f(x) = x - \frac{1}{2}x^3$ عندما تتغير " (½) " (2)

xvi $f(x) = 1/(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ عندما تتغير " (5) " (3)

xvii $f(x) = x - \frac{1}{x^2 + 2}$ عندما تتغير " (—4) " (1)

xviii $f(x) = x - x$ عندما تتغير " (—5) " (2)

xix $f(x) = x^2 + x + 5$ عندما تتغير x $(-3) \leftarrow (-1)$

xx $f(x) = \dfrac{1}{x}$ عندما تتغير x $(1) \leftarrow (2)$

٢ ــ باستخدام القواعد الأولية للتفاضل أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x) = 4x^6$

2) $f(x) = 5x^2$

3) $f(x) = 18x^2$

4) $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$

5) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

6) $f(x) = 5x^2 - 6x$

7) $f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$

8) $f(x) = (x^2 - (x^3 + 3)$

9) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

10) $f(x) = (x^3 + 1)(x^4 - x + 5)$

11) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ $(x \neq -1)$

12) $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$,

13) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ $(x \neq 1)$

14) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}$

15) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$, $x \neq 2$

16) $f(x) = x^{-3} + x^{-2}$, $(x \neq 0)$

17) $f(x) = (x^2 + 1)^{10}$

18) $f(x) = (x^2 (5x^{10} + 1)^8 - 1)^7$

19) $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^{10}$, $x \neq 1$

20) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $(x \neq \pm 1)$

21) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$, $(x \neq -1)$

22) $f(x) = \dfrac{(3x^3 - 4x^2 + 6x + 8)^9}{x^2}$, $x \neq 0$

23) $f(x) = \sqrt[9]{x^2 - x} - 1$

24) $f(x) = x^2 (3x^4 - 3x^3 - 6)^6$.

25) $f(x) = \dfrac{(10x^5 + 7x^8 - 2x)^{18}}{x^{20}}$, $(x \neq 0)$

26) $f(x) = \sqrt{(2x + 1)^7}$

27) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{3/2}$, $(x \neq 0)$

28) $f(x) = \left(2x^2 + \dfrac{x}{2}\right)^{1/2}$

29) $f(x) = (1 + 2x)\sqrt{x^2 - 4}$, $(x \neq \pm 2)$.

٣ ـ اذا كانت $f(z) = z^2 + 3z - 1$ فأوجد كل من :

$f'(2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(z)$

٤ ـ اذا كانت $f(w) = \sqrt{w}$ حيث $w \neq 0$ فأوجد كل من :

$f'(1)\ ,\ f'(4)\ ,\ f'(3)\ ,\ f'(a)\ ,\ (a > 0)$

٥ ـ أوجد ميل المستقيم الذى يمس منحنيات الدوال الآتية عند النقاط التى احداثياتها السينية موضحة امام كل منها . ثم أوجد قيمة الدالة عند نقطة التماس مع المستقيم . وكذلك أوجد معادلتى المماس والعمودى لكل منهما عند النقطة المعطاة .

1) $f(x) = 2x^2 + 3 \quad , \quad x = 1$

2) $f(x) = 16x^3 \quad , \quad x = 1$

3) $f(x) = x^2 - 4 \quad , \quad x = 2$

4) $f(w) = w^3 + 6 \quad , \quad w = 3$

5) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad , \quad x = 0$

6) $f(x) = mx + b \quad , \quad x = a.$

٦ ـ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ للدوال الضمنية الآتية :

1) $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

2) $x^2 + xy + y^2 = 6$

3) $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 6$

4) $x^2 + 3xy - y^2 = 20$

5) $\dfrac{x}{y} - 2y = x$

6) $\sqrt[3]{xy} + x = \sqrt[3]{y^2}$

7) $\dfrac{x - y}{x + y} = x$

8) $\dfrac{y^2}{x + y} = 1 - x^2$

9) $x + 1 + 2y\sqrt{y} = x^2$

10) $y + \sqrt{xy^3} = 7x^3.$

٧ ـ أوجد المشتقة الاولى للدوال الآتية :

1) $f(x) = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$

2) $f(x) = x^2 \sin 3x^4.$

3) $f(x) = \sin^3 (4x - 3)$

4) $f(x) = (x^3 + \tan x)^4$

5) $f(x) = \cos' (x^2 - 3x)$

6) $f(x) = \sec^2 (2x^3 + 3)$

7) $f(x) = (\ln (2x - 5)) \sin^5 (x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$

8) $f(x) = e^{x^2} . \sin (\tan x)$

9) $f(x) = \tan (\sec^2 (3x - 1))$

10) $f(x) = \csc (2 \tan \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}})$

٨ ـ أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

1) $f(x) = \sin^{-1} (4x + 5)$

2) $f(x) = \sin^{-1} (5 \cos (2x + 4))$

3) $f(x) = \tan^{-1} (x^2 - 2)$

4) $f(x) = \sec^{-1} (2 \tan \frac{x}{2})$

5) $f(x) = \tan^{-1} (2 \sec^2 x)$

6) $f(x) = \csc^{-1} (\sqrt{1 + \tan x})$

7) $f(x) = \sec^{-1} (\frac{2x + 1}{2x - 1})$

8) $f(x) = \csc^{-1} (\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - x - 1}})$

9) $f(x) = \sin^{-1} (\sqrt{1 - x^2})$

10) $f(x) = \cot^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

٩ ــ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x) = \log_e\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) $f(x) = \ln(\cos x)$

3) $f(x) = \ln(\tan(x^2 - 1))$

4) $f(x) = (\ln x)/x$

5) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

6) $f(x) = e^{x^2} . \cos(x^2 \ln x - 1)$

7) $f(x) = \ln(\sin 3x^3)^6$

8) $f(x) = \ln(\ln x^3)$.

9) $f(x) = e^{\ln(3x-2)} . (\sin(x^3 - 3x^2 + 2))$.

10) $f(x) = x^5 . e^{-5x^8 - x} + x^5 e^{-\sqrt{x} \sin x}$

11) $f(x) = \sin(\ln(e^x))$

12) $f(x) = \sin^{-1}(e^x . \ln x)$

13) $f(x) = \ln(\sin^{-1}\sqrt{1 - x^2})$.

14) $f(x) = (e^{x^2 \sin x}) + (e^{\ln(\cos^{-1} x)})$

15) $f(x) = e^{\tan^{-1} x + \ln(\sec^{-1} x)}$

١٠ ــ أوجد تفاضلات الدوال الآتية :

1) $f(x) = (2x + 3)^{(x^2 - 1)}$

2) $f(x) = (\sin x)^{\tan x^3}$

3) $f(x) = (\ln(x^2+2))\, e^{\sin x^2}$

4) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2 (x+1)^3}{(x+2)^4 (x-2)^5}$

5) $f(x) = \dfrac{(x^2+x-1)^7 (x^2-1)^8 (x-2)^9}{(x+1)^9 (x^2+x+1)^{10} (2x+4)^8}$

١١ ــ أوجد كل من $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ بالنسبة الى « x » للدوال الآتية :

1) $f(x) = e^{6x}$

2) $f(x) = x^4 - \ln(x\, e^{2x})$

3) $f(x) = 7x^5 - x^6 - 5$

4) $f(x) = \tan(2x)$

5) $f(x) = x^{10} - 10$

6) $f(x) = x^{-8} - x^8$

7) $f(x) = \ln(e^{x^2}$

8) $f(x) = \sin(e^{\ln x^2})$

الباب الخامس

تطبيقات التفاضل

بند ٥ ـ ١ النهايات العظمى والصغرى ورسم المنحنيات :

تعريف ٥ ـ ١ ـ ١ الدوال التزايدية Increasing Functions :

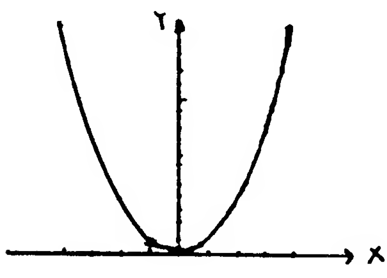
اذا كانت $f(x_1) < f(x_2)$ لجميع قيم x_2, x_1 فى الفترة المقفلة $[a, b]$ عندما تكون $x_2 > x_1$ قيل ان الدالة $f(x)$ دالة تزايدية فى الفترة المقفلة $[a, b]$.

مثال ٥ ـ ١ ـ ١ :

تعتبر الدالة $y = x^2$ دالة تزايدية فى الفترة $[0, 4]$ وذلك لأنه من الملاحظ انه عندما تتجه « x » الى ناحية اليمين (أى تزيد قيمتها) فان قيمة الدالة $f(x)$ تزداد هى الأخرى كما هو واضح من الشكل ٥ ـ ١ ـ ١ .

تعريف ٥ ـ ١ ـ ٢ الدوال التناقصية Decreasing Functions :

اذا كانت $f(x_2) < f(x_1)$ لجميع قيم x_2, x_1 فى الفترة المقفلة $[a, b]$ عندما $x_2 > x_1$ قيل أن الدالة $f(x)$ دالة تناقصية فى الفترة المقفلة $[a, b]$.



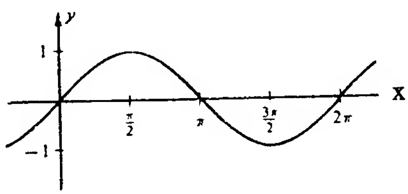
شكل ٥ ـ ١ ـ ١

مثال ٥ ـ ١ ـ ٢ :

الدالة $f(x) = x^2$ الموضح تمثيلها البيانى فى شكل ٥ ـ ١ ـ ١ تعتبر دالة تناقصية فى الفترة $[-4, 0]$ اى ان قيمة الدالة تتناقص كلما تزايدت قيمة « x » فى الفترة $[-4, 0]$

ومن المعنى الهندسى للتفاضل فان $\frac{dy}{dx}$ عبارة عن ميل المماس للمنحنى عند النقطة (x, y) فاذا كانت الدالة تزايدية عند نقطة معينة فان ميل المماس للمنحنى يكون موجبا عند هذه النقطة . اى ان $\frac{dy}{dx} > 0$ عند تلك النقطة . أما اذا كانت الدالة تناقصية عند نقطة معينة فان ميل المماس يكون سالبا عند تلك النقطة أى أن $\frac{dy}{dx} < 0$ عند تلك النقطة .

وتسمى النقطة التى يكون عندها $\frac{dy}{dx} = 0$ بنقطة الانتقال (Transition Point) أو نقطة الدوران (Turning Point) أى نقطة الدوران هى النقطة التى تتحول عندها الدالة من تزايدية الى تناقصية أو العكس .



شكل ٥ - ١ - ٢

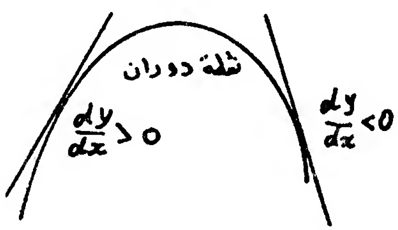
ومن الرسم البيانى الدالة $y = \sin x$ فى الحيز $[0, 2\pi]$ نجد أن الدالة تزايدية فى النطاق (حيز) $[0, \pi/2]$ وكذلك فى النطاق $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ وتناقصية فى النطاق $[\pi/2, \frac{3\pi}{2}]$. عند $x = \pi/2$, $x = \frac{3\pi}{2}$ فللدالة نقطتى دوران . وباستخدام التفاضل نجد ان $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

حيث أن $\cos x > 0$ فى كل النطاق $[0, \frac{1}{2}\pi)$, $(3\pi/2, 2\pi]$ وكذلك فان $\cos x < 0$ فى النطاق $(\frac{1}{2}\pi, 3\pi/2)$ واخيرا فان $\cos x = 0$ عند كل من $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$

ومما سبق نصل الى التعريف التالى :

تعريف ٥ – ١ – ٣ نقط الدوران Turning points :

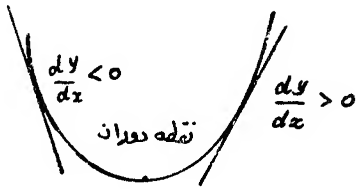
نقط الدوران هى النقط التى تتغير عندها اشارة $\frac{dy}{dx}$ من موجب الى سالب او العكس . وعند نقطة الدوران يكون المنحنى مقعرا الى اسفل أو مقعرا الى أعلى فاذا كان المنحنى مقعرا الى اسفل فان اشارة $\frac{dy}{dx}$ تتغير من موجب الى سالب قبل وبعد نقطة الدوران على الترتيب . أى ان $\frac{dy}{dx}$ عبارة عن دالة تناقصية اذا اتجهنا ناحية اليمين (فى اتجاه ازدياد « x ») وبالتالى فان $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون سالبة وتعتبر نقطة الدوران فى هذه الحالة نهاية عظمى (محلية) للمنحنى أى نهاية عظمى بالنسبة للنقط المجاورة لها (من قبل ومن بعد) انظر شكل ٥ – ١ – ٣ .



شكل ٥ – ١ – ٣ .

اما اذا كان المنحنى مقعرا الى اعلى فان اشارة $\frac{dy}{dx}$ تتغير من سالب الى موجب قبل وبعد نقطة الدوران على الترتيب . اى ان $\frac{dy}{dx}$ عبارة عن دالة تزايدية اذا اتجهنا ناحية اليمين (اتجاه ازدياد « x ») وبالتالى فان $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون موجبة وتعتبر نقطة الدوران فى هذه الحالة نهاية صغرى للمنحنى (محلية) .

انظر الشكل ٥ ـ ١ ـ ٤ . وعليه نجد أن نقط الدوران تنقسم الى نوعين هى نقط النهايات العظمى والصغرى .



شكل ٥ ـ ١ ـ ٤

ومما سبق نستنتج أن للمنحنى نهاية عظمى عند نقطة معينة اذا توافر الشرطان :

(1) $\frac{dy}{dx} = 0$ (ويسمى الشرط الضرورى) (2) $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

(ويسمى الشرط الكافى) عند تلك النقطة .

وكذلك للمنحنى نهاية صغرى عند نقطة معينة اذا توافر الشرطان .

(1) $\frac{dy}{dx} = 0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ عند تلك النقطة .

تعريف ٥ ـ ١ ـ ٤ نقط الانقلاب Points of inflection

النقط التى يغير المنحنى عندها تقعره من (الى أعلى) الى (الى أسفل) أو العكس تسمى نقطة انقلاب أى النقط التى عندها $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

ويسمى الشرط $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ الشرط الضرورى والشرط الكافى هو $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ وستساعدنا نقط الدوران ونقط الانقلاب لرسم المنحنيات .

٥ ـ ١ ـ ١ رسم المنحنيات :

لرسم منحنى الدالة التى معادلتها $y = f(x)$ نتبع الخطوات التالية :

١ ـ من المعادلة $y = f(x)$ نوجد $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$

٢ ـ نوجد قيم « x » التى تكون عندها $\frac{dy}{dx}$ موجبة أو سالبة

ونعين قيم « x » التى عندها $\frac{dy}{dx} = 0$ فتكون عندها نقطة الدوران ثم

نحسب قيم « y » عند هذه النقطة لتحديد موضعها فى المستوى نحسب

اشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند نقطة الدوران فاذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

تكون للمنحنى نهاية صغرى عند هذه النقطة وان كانت $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

فتكون للمنحنى نهاية عظمى عند تلك النقطة .

٣ ـ نعين نقط الانقلاب وهى النقط التى عندها $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

او النقط التى عندها تتغير اشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$ من موجب الى سالب أو العكس.

بشرط أن $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ عند هذه النقطة .

٤ ـ نعين نقط تقاطع المنحنى مع المحورين . فلايجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور « x » نضع $y = 0$ فى معادلة المنحنى ثم نوجد جذور المعادلة الناتجة . ولايجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور « y » نضع $x = 0$ فى معادلة المنحنى ثم نوجد قيمة « y » .

٥ ـ نعين نقط اضافية قبل وبعد النقط التى حصلنا عليها جميعا ثم نصل هذه النقط بمنحنى أملس (غير متعرج) .

مثال ٥ ـ ١ ـ ٣ :

أوجد نقط الدوران ونقط الانقلاب لمنحنى الدالة المعرفة بالمعادلة

$y = x^3 - 6x^2 + 9x$ ثم ارسمه

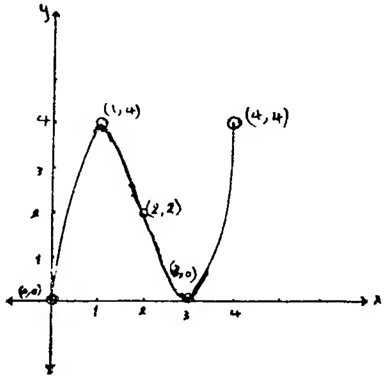
الحـــل :

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad (1)$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 \qquad (2)$$

$$y'' = 6x - 12 \qquad (3)$$

$$y''' = 6$$



شكل ٥ — ١ — ٥
$y = x^3 - 6x^2 + 9x$

لتعيين نقط الدوران نحل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\therefore\ 3x^2 - 12x + 9 = 0 \qquad \therefore\ x^2 - 4x + 3 = 0$

$\therefore\ (x - 1)(x - 3) = 0 \qquad \therefore\ x = 1\ ,\ x = 3$

نعين اشارة « y'' » عند هاتين القيمتين السابقتين

$$(y'')_{x=1} = (6x - 12)_{x=1} = 6 - 12 = -\ ve$$

∴ يوجد نهاية عظمى للمنحنى عند $y = 4\ , x = 1$ أى موقع النهاية العظمى عند $(1, 4)$

$$(y'')_{x=3} = (6x - 12)_{x=3} = 18 - 12 = +\ ve$$

∴ يوجد نهاية صغرى للمنحنى عند $y = 0\ , x = 3$ أى موقع النهاية الصغرى عند $(3, 0)$ ولتعيين نقط الانقلاب نحل المعادلة $y'' = 0$

$\therefore\ 6x - 12 = 0 \qquad \therefore\ x = 2.$

وواضح من (4) أن $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ وعليه فيوجد للمنحنى نقطة انقلاب واحدة عند $(2\ ,\ 2)$ ولايجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور « x » نحل المعادلة $y = 0$

$\therefore\ x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \qquad \therefore\ x(x - 3)^2 = 0$

$\therefore\ x = 0, x = 3, x = 3$

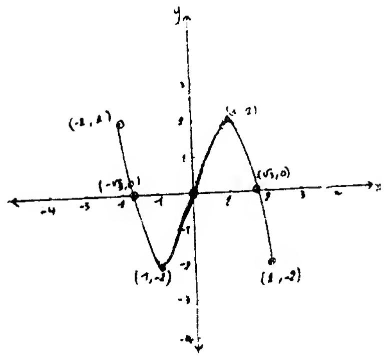
أى أن المنحنى يقطع محور « x » عند $x = 0$ ويمسه عند $x = 3$ والتماس واضح من تكرار الجذر . نأخذ نقطتين على الأقل غير النقط التى حصلنا عليها سابقا فمثلا لو اخذنا $x = -1$ فان $y = -16$ واذا اخذنا $x = 4$ فان $y = 4$ أى أن المنحنى يمر بالنقطتين $(4, 4)$ and $(-1 , -16)$

وكذلك نصل هذه النقط جميعا بمنحنى أملس كما يوضح شكل ٥ — ١ — ٥ .

مثال ٥ — ١ — ٦ :

ارسم منحنى الدالة المعرفة بالمعادلة $y = 3x - x^3$

الحل :



شكل ٥ — ١ — ٦ $y = 3x - x^3$

$$y = 3x - x^3 \quad (1)$$

$$y' = 3 - 3x^2 \quad (2)$$

$$y'' = -6x \quad (3)$$

$$y''' = -6 \quad (4)$$

للمنحنى نقط دوران عندما

$y' = 0$

فمن (٢) نجد :

$\therefore 3(1 - x^2) = 0$ $\qquad \therefore 3 - 3x^2 = 0$

$\therefore x = 1 , x = -1$ $\qquad \therefore 3(1 - x)(1 + x) = 0$

نبحث الآن اشارة y'' عند القيمتين السابقتين :

$$\therefore (y'')_{x=1} = (-6x)_{x=1} = -\,ve$$

∴ توجد للمنحنى نهاية عظمى عند $x = 1 , y = 2$

∴ موقع النهاية العظمى عند النقطة $(1, 2)$

$$\therefore (y'')_{x=-1} = (-6x)_{x=-1} = +\,ve$$

توجد للمنحنى نهاية صغرى عند $y = -2 \, , x = -1$

∴ موقع النهاية الصغرى عند النقطة $(-1, -2)$ لايجاد نقط الانقلاب نحل المعادلة $y'' = 0$ فمن (٣) نجد :

$$\therefore \quad -6x = 0 \qquad \therefore \quad x = 0$$

وواضح من (٤) أن $y''' \neq 0$

∴ توجد للمنحنى نقطة أنقلاب واحدة عند النقطة $(0, 0)$

والمنحنى يقطع محور السينات عندما $y = 0$ فمن (١) نجد :

$$\therefore \quad 3x - x^3 = 0 \qquad \therefore \quad x(3 - x^2) = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \, , x = \sqrt{3} \, , \quad x = -\sqrt{3}$$

∴ المنحنى يقطع محور السينات عند النقط

$$(0, 0) \, , \, (\sqrt{3}, 0) \, , \, (-\sqrt{3}, 0)$$

عندما $x = 2$ فان $y = -2$ أى أن المنحنى يمر بالنقطة $(2, -2)$

عندما $x = -2$ فان $y = 2$ أى أن المنحنى يمر بالقطة $(-2, 2)$

نصل هذه النقط جميعها فنحصل على رسم المنحنى الذى هو مبين فى شكل ٥ ــ ١ ــ ٦ فى النطاق $[-2 , 2]$. لاحظ أن الدالة فردية وأن المنحنى متماثل بالنسبة لنقطة الأصل .

مثال ٥ ــ ١ ــ ٥ :

ارسم المنحنى المعرفة بالمعادلة $y = 8x^2 - x^4$ مبينا كل خصائصه

الحــل :

$$y = 8x^2 - x^4 \qquad (1)$$

$$y' = 16x - 4x^3 \qquad (2)$$

$$y'' = 16 - 12x^2 \qquad (3)$$

$$y''' = -24x \qquad (4)$$

للمنحنى نقط دورانه عندما $y' = 0 \, , y'' \neq 0$ ولايجاد هــذه النقط نحل المعادلة $y' = 0$ فمن المعادلة (٢) نجد :

$\therefore\ 16x - 4x^3 = 0 \quad \therefore\ 4x(4 - x^2) = 0$

$\therefore\ 4x(2 - x)(2 + x) = 0 \quad \therefore\ x = 0, x = 2, x = -2$

نبحث اشارة « y'' » عند هذه القيم الثلاثة السابقة فمن المعادلة (٣) نجـد :

$\therefore\ (y'')_{x=0} = (16 - 12x^2) = +ve$

∴ توجد للمنحنى نهاية صغرى عند $y = 0, x = 0$

∴ موقع النهاية الصغرى عند النقطة $(0, 0)$

$\therefore\ (y'')_{x=2} = (16 - 12x^2)_{x=2} = -ve$

∴ توجد للمنحنى نهاية عظمى عند $y = 16, x = 2$

∴ موقع النهاية العظمى عند النقطة $(2, 16)$

$\therefore\ (y'')_{x=2} = (16 - 12x^2)_{x=-2} = -ve$

∴ توجد للمنحنى نهاية عظمى اخرى $y = 16, x = -2$

∴ موقع النهـــاية العظمى الأخرى عند النقطـــة $(-2, 16)$.

لايجاد نقط الانقلاب نحل المعادلة $y'' = 0$ فمن (٣) نجد :

$$\therefore\ 16 - 12x^2 = 0 \qquad \therefore\ x^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore\ x = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad x = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

∴ يوجد نقطتى انقلاب عند النقطتين $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{80}{9}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{80}{9}\right)$

لاحظ أن $y''' \neq 0$ عند هاتين النقطتين

لايجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور « x » نحل المعادلة $y = 0$

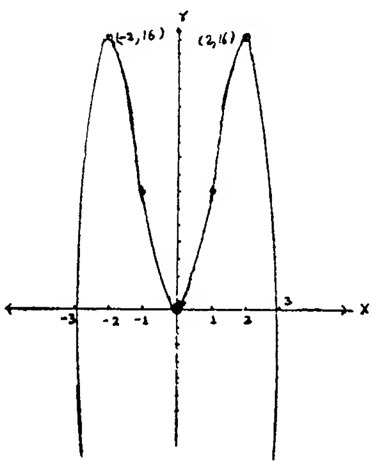
$\therefore\ 8x^2 - x^4 = 0 \quad \therefore\ x^2(8 - x^2) = 0$

$\therefore\ x = 0, x = 0, x = 2\sqrt{2}, x = -2\sqrt{2}$

عندما $x = 3$ فان $y = -9$ اى ان المنحنى يمر بالنقطة $(3, -9)$

عندما $x = -3$ فان $y = -9$ أى أن المنحنى يمر بالنقطة $(-3, -9)$

نصل هذه النقط جميعهـــا فنحصل على شكل المنحنى الموضح بالشـــكل ٥ – ١ – ٧ . ويمكن ملاحظة أن الدالة دالة زوجية ولذا فان المنحنى متماثل بالنســـــبة للمحور الصادى



شكل ٥ – ١ – ٧
$y = 8x^2 - x^4$

مثال ٥ ـ ١ ـ ٦ :

ارسم منحنى الدالة $y = e^{-x^2}$

الحـل :

$$y = e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y' = -2\,x\,e^{-x^2} \quad (2)$$

$$y'' = -2\,(e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}(-2\,x)\,) = -2\,e^{-x^2}(1 - 2\,x^2) \quad (3)$$

$$y''' = -2\,[\,e^{-x^2}(-4\,x) + (1 - 2\,x^2)\,e^{-x^2}(-2\,x)\,]$$

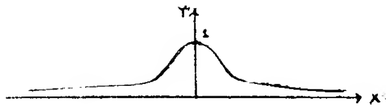
$$= +\,4\,x\,e^{-x^2}[\,2 + 1 - 2\,x^2\,] = +\,4\,x\,e^{-x^2}(3 - 2\,x^2) \quad (4)$$

لايجاد نقط الدوران نحل المعادلة $y' = 0$ أى أن $-2\,x\,e^{-x^2} = 0$ ومنها فان $x = 0$ وبمـــا أن $y'' = -2$ عنـــد $x = 0$ فيكون المنحنى نهاية عظمى عند النقطة $(0, 1)$. أما لايجاد نقط الانقلاب نحل المعادلة $y'' = 0$

$$\therefore \quad -2\,(1 - 2\,x^2)\,e^{-x^2} = 0$$

$$\therefore \quad x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \simeq \pm\,0.7$$

أى أنه للمنحنى نقطتى انقلاب عند $(-0.7\,,\,e^{-\frac{1}{2}})\,,\,(0.7, e^{-\frac{1}{2}})$
ومن التمثيل البيانى للمنحنى نجد أنه كلما اتجهت « x » ناحية اليمين أو اليسار فان « y » تقل تدريجيـــــا حتى تقابل المنحنى محور « x » عنـــدما $x \to \pm\infty$ ولهذا المنحنى أهمية خاصة فى الاحصـــاء ويسمى دالة التوزيع القياسى . لاحظ تماثل المنحنى حول المحور الصادى



شكل ٥ — ١ — ٨

مثال ٥ ــ ١ ــ ٧ :

اثبت أن مجموع أى عدد موجب ومقلوبه يساوى ٢ على الأقل .

الحـل :

نفرض أن العدد الموجب هو« x » ومقلوبةهو « $\frac{1}{x}$ » وكذلك نفرض أن مجموعها هو :

$$\therefore \quad y = x + \frac{1}{x} \qquad (1)$$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} \qquad (3)$$

« y » لها نهاية عظمى أو صغرى عندما $y' = 0$ أى أنه عنـدما

$1 - \frac{1}{x^2} = 0$ ونظرا لأن العدد موجب فان : $x = 1$

$y''_{x=1} = +2$

اى أن الدالة لها نهاية صغرى عندما $x = 1$ ومنه فان $y = 1 + 1 = 2$

اىأن مجموع اى عدد ومقلوبه له نهاية صغرى (أصغر مايمكن) عندما $y = 2$

مثال ٥ ــ ١ ــ ٨ :

ارسم منحنى متصل للدالة $y = f(x)$ يحقق الشروط التالية :

$f(-2) = 6,\ f(0) = 4\ ,\ f(2) = 0\ ,\ f'(2) = f'(-2) = 0$

$f'(x) > 0$ for $|x| > 2$, $f'(x) < 0$ for $|x| < 2$.

الحـل :

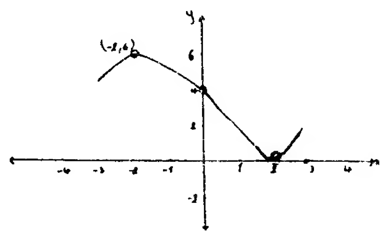
بما ان $f'(x) > 0$ لجميـع قيم « x » التى اكبر من « 2 » وأصفر من « 2− » . اى ان الدالة تزايدية لجميع قيم « x » فى النطاق $2 < x < -2$ اى فى $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

وبما ان $f'(x) < 0$ لجميع قيم « x » اصـغر من « 2 » واكبر من « 2− » .اى ان الدالة تناقصية لجميع قيم « x » فى النطـاق $-2 < x < 2$ اى فى الفترة $(-2, 2)$

وبما ان $f'(-2) = f'(2) = 0$ اذا للمنحنى نقط دوران عنـــد $x = 2 , x = -2$.

عند $x = -2$ نجد للدالة نهاية عظمى لأن ميل المماس يتحول من موجب الى سالب قبل وبعد $x = -2$ على الترتيب .

وعند $x = 2$ نجد للدالة نهاية صغرى لأن ميل المماس يتحول من سالب الى موجب قبل وبعد $x = 2$ على الترتيب . كما هو مبين فى شكل ٥ ــ ١ـ٩ .



شكل ٥ ــ ١ ــ ٩

بند ٥ ــ ٢ نظريات النهايات العظمى والصغرى :

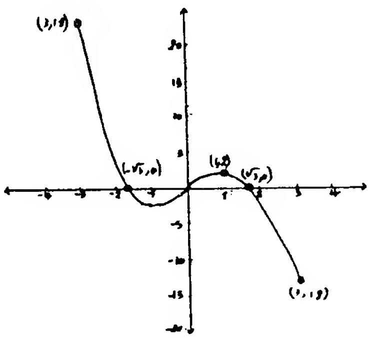
يقال للدالة « f » أن لها نهاية عظمى محلية (نسبية) Relative Maximum عند النقطـــة التى احداثيهـــا السينى $x = a$ اذا كانت $f(a) \geqslant f(a+h)$ لكل قيم « h » الموجبة والسالبة القريبة جدا من الصفر (أى فى المنطقة المجاورة) .

ويقال أيضا ان للدالة « f » نهاية صـــــفرى محلية (نســـبية) Relative Minimum عند النقطة التى احداثيهـــا السينى $x = a$

اذا كانت $f(a+h) \leqslant f(a)$ لكل قيم « h » الموجبة والسالبة القريبة جدا من الصفر (أى فى المنطقة المجاورة) .

ويقال كذلك ان للدالة « f » نهـــاية عظمى مطلقة (Absolute Maximum) عند النقطة التى احداثهــا السينى $x = a$ اذا كانت $f(a) \geqslant f(x)$ لجميـــع قيم « x » وليس فقط لكل قيم « x » القريبة من « a » (أى لقيم « x » فى النطاق كله المعرفة فيه الدالة) .

وتوضيحا لذلك فان الدالة المعرفة بالمعـــــــادلة $y = 3x - x^3$ فى النطاق $[-3, 3]$ نجـــد ان لها نهـــاية عظمى نســـبية عند $x = 1$ ونهاية صغرى نسبية عند $x = -1$ ونهاية عظمى مطلقة عند $x = -3$ ونهاية صغرى مطلقة عند $x = 3$ كما هو موضح فى الشكل ٥ـ٢ـ١ .



شكل ٥ ـ ٢ ـ ١ $y = 3x - x^3$

نظرية ٥ ـ ٢ ـ ١ :

اذا عرفت الدالة $f(x)$ فى الحيز $a \leq x \leqslant b$ وكانت لها نهاية عظمى نسبية أو صغرى نســـــبية عند $x = c$ وكذلك اذا كانت الدالة قابلة للتفاضل وكانت $f'(x)$ كمية محدودة عند $x = c$ فان $f'(c) = 0$.

البرهان :

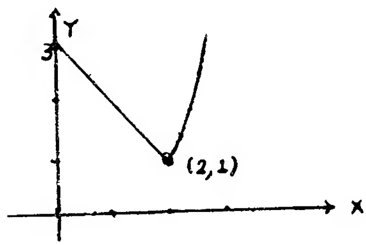
نعلم أنه اذا كانت الدالة « f » دالة تزايدية عنـــــد $x = c$ فان $f'(c)$ تكون موجبة ولكن نظرا لأن الدالة « f » لها نهـــاية عظمى نسبية أو صغرى نسبية عند $x = c$ فان الدالة « f » لا تعتبر دالة تزايدية ولا تناقصية عند $x = c$. أى انه $f'(c)$ لا يمكن أن تكون موجبة ولا سالبة . ولذلك فان $f'(c) = 0$

ملاحظة ٥ ـ ٢ ـ ١ :

فى بعض الحالات الشاذة يوجد للمنحنى نهاية عظمى نسبية أو نهاية صغرى نسبية بالرغم من ان ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة لايساوى صفر $\left(\frac{dy}{dx} \neq 0\right)$ كما هو مبين بالأمثلة .

مثال ٥ ـ ٢ ـ ١ :

نلاحظ ان المنحنى المعرف كالتالى :



شكل ٥ ـ ٢ ـ ٢

$$y = \begin{cases} 3 - x & \text{for } x \leqslant 2 \\ \frac{1}{2} x^2 - 1 & \text{for } x > 2 \end{cases}$$

وبالرغم من انه يوجد للمنحنى نهاية صغرى عند $x = 2$ فانه عندما تحسب ميل المماس للمنحنى فى الحيز $x \leqslant 2$ نجد أن ميل المماس يساوى (-1) ذلك لأن $\frac{dy}{dx} = -1$ فى الحيز (النطاق) $x \leqslant 2$

وعندما نحسب ميل المماس للمنحنى فى النطاق $x > 2$ نجد ان ميل المماس يساوى « x » اى أن $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x \to 2+} = 2$ وهذا يعنى ان ميل المماس له قيمتان مختلفتان عند نفس النقطة . فيقال فى هذه الحالة ان ميل المماس للمنحنى ليس له وجود عند هذه النقطة $(x = 2)$ (**لاحظ انه بعكس تعريف التفاضل النهاية اليمنى لاتساوى النهاية اليسرى . ومن ثم تظهر النتيجة السابقة)** .

مثال ٥ ـ ٢ ـ ٢ :

المنحنى المعرف بالدالة $y = |4 - x^2|$ فى الحيز المقفل $[-3, 3]$

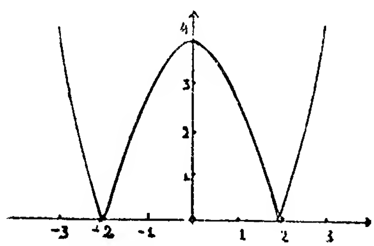
نلاحظ ان $y = 4 - x^2$ عندما $|x| < 2$ وكذلك $y = x^2 - 4$ عندما $3 \geqslant |x| > 2$ ومنه نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = -2x \quad \text{(1)}$$ لجميع قيم « x » حيث $x \in (-2, 2)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{(2)}$$ لجميع قيم « x » حيث، $x \in [-3, -2)$, $x \in (2, 3]$

وبذلك فان ميل المماس للمنحنى لا يوجد له قيمة واحـدة عندما $x = -2 , x = 2$

بالرغم من انه يوجد للمنحنى نهايتين صغريين عند $x = -2 , x = 2$ كما هو موضح فى الشكل ٥ ـ ٢ ـ ٣ .



شكل ٥ ـ ٢ ـ ٣ $y = |4 - x^2|$

بند ٥ ـ ٣ : التطبيقات العملية للتفاضل :

يستخدم علم التفاضل فى حل كثير من المسائل ذات الصيغة العملية والتطبيقية وتتلخص طريقة الحل فى ايجاد النهايات العظمى والصـغرى لبعض الدوال التى تمثل تلك الكميات المراد دراستها . فعلى سبيل المثال فى مجال الصناعة يمكن بحث الشروط اللازمة التى تحقق اكبر انتاج ممكن بأقل تكاليف لازمة . وسنركز اهتمامنا على تلك التطبيقات التى يلزم حلها وضـع نموذج رياضى للمسـألة يربط بين المتغيرين وذلك بايجاد الدالة« y » (المتغير التابع) بدلالة المتغير المستقل« x ». ثم البحث عن قيم « x » التى تجعل « y »اكبر أو اقل مايمكن تبعا لنوع المسألة المطلوب حلها . و نلخص طريقة الحل فيما يلى :

١ ـ للسهولة يفضل وضع نموذج مبدئى أو نموذج هندسى للمشكلة. وتحديد الكميات المتغيرة والرمز لها بمتغيرات وكذلك تحديد الكميات الثابتة والرمز لها بثوابت .

٢ ـ كتابة معادلة الكمية المراد حساب النهايات العظمى أو الصغري لها ولتكن المتغير التابع « y » بدلالة متغير مستقل واحد وليكن « x » وهذا بدوره يتطلب بعض الحسابات الجبرية تحددها المعلومات المعطاه فى المسألة .

٣ ـ اذا كانت العلاقة المشار اليها فى الخطوة السابقة على الصورة $y = f(x)$ فنحصل على قيم « x » التى تجعل « y » لها نهاية عظمى أو نهاية صغرى من المعادلة $0 = \frac{dy}{dx}$ مع ملاحظة أن قيم « x » التى تجعل $y'' > 0 , y' = 0$ تعطى نهاية صغرى للمتغير « y » أما قيم « x » التى تجعل $y'' < 0 , y' = 0$ تعطى نهاية عظمى للمتغير « y »
وسنحاول فى الأمثلة التالية حل بعض المسائل باعتبار الخطوات المشار اليها أعلاه .

مثال ٥ ـ ٣ ـ ١ :

أوجد العددين الموجبين الذى مجموعهما ٢٠ وحاصل ضربهما أكبر مايمكن .

الحل :

نفرض أن العدد الأول « x » فيكون العدد الآخر هو $(20 - x)$
وكذلك نفرض أن حاصل ضربهما يساوى « y » . ومن ثم نحصل على المعادلة :

$$y = x\,(20 - x) = 20\,x - x^2 \qquad (1)$$

$$y' = 20 - 2\,x \qquad (2)$$

$$y'' = -2 \qquad (3)$$

كما نعلم أن « y » لها نهاية عظمى اذا كانت $y'' < 0 , y' = 0$
ومن المعادلة (٣) نجد أن $y'' < 0$ ومن المعادلة (٢) ينتج لدينا $20 - 2x = 0$
ومنه يكون $x = 10$

∴ فالعدد الأول هو ١٠ والعدد الثانى هو ١٠ كذلك .

مثال ٥ ــ ٣ ــ ٢ :

صفيحة معدنية مربعة الشكل طولها « a » يراد طيها فى صورة صندوق مفتوح على شكل متوازى مستطيلات وقاعدته مربعة وذلك بنزع أجزاء متساوية مربعة الشكل من أركانها الأربعة . أوجد أبعاد الصندوق لكى تكون سعته أكبر مايمكن .

الحــل :

نفرض أن طول ضلع الجزء المنزوع « x » ، وحجم الصندوق « y » وبذلك يكون لدينا .

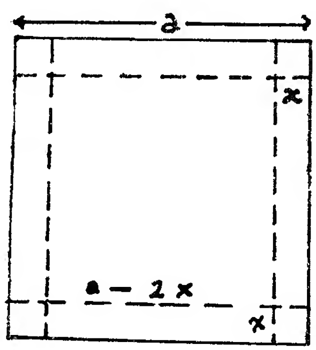
$$y = x(a-2x)^2 = x(a^2-4ax+4x^2)$$

$$= a^2x - 4ax^2 + 4x^3 \qquad (1)$$

$$y' = a^2 - 8ax + 12x^2 \qquad (2)$$

$$y'' = -8a + 24x \qquad (3)$$

« y » تكون نهاية عظمى عندما $y' = 0$, $y'' < 0$ ومن (2)



$$\therefore\ a^2 - 8ax + 12x^2 = (a-2x)(a-6x) = 0$$

$$\therefore\ x = \tfrac{1}{2}a\ ;\ x = \frac{1}{6}a$$

$$\therefore \quad (y'')_{x = \frac{1}{2} a} = (-8a + 24x)_{x = \frac{1}{2} a}$$

$$= -8a + 12a = +\,ve$$

$$\therefore \quad (y'')_{x = (a/6)} = (-8a + 24x)_{x = (a/6)}$$

$$= -8a + 4a = -\,ve$$

ومنه يكون المتغير « y » نهاية عظمى اذا كانت قيمة $x = (a/6)$ وذلك لكى يتحقق الشرط $(y'' < 0)$

∴ طول ضلع القاعدة $a - 2x = a - \frac{1}{3} a = \frac{2}{3} a$

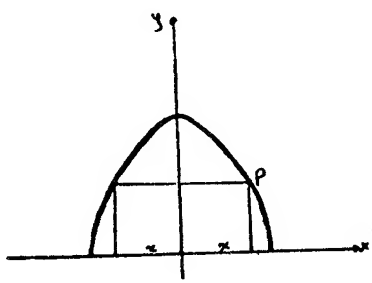
والارتفاع $(a/6)$

مثال ٥ ـ ٣ ـ ٣ :

أوجد مساحة أكبر مستطيل بحيث تقع قاعدته السفلى على محور « x » والعليا تقع على المنحنى $y = 12 - x^2$.

الحـل :

نفرض أن طول المستطيل « $2x$ » وعرضه « y » ومساحته « A » وبذلك يكون لدينا $A = 2xy$ وبما أن النقطة $P(x, y)$ تقع على المنحنى $y = 12 - x^2$ فاحداثيات النقطة « P » تحقق معادلة هذا المنحنى .



$$\therefore\ A = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3 \qquad (1)$$

$$\therefore\ \frac{dA}{dx} = 24 - 6x^2 \qquad (2)$$

$$\therefore\ \frac{d^2A}{dx^2} = -12x \qquad (3)$$

∵ المساحة « A » نهاية عظمى

∴ يجب أن يتوفر الشرط $y' = 0$, $y'' < 0$

$\therefore\ 24 - 6x^2 = 0 \qquad \therefore\ x^2 = 4 \qquad \therefore\ x = 2$

∴ طول المستطيل = « 4 » وعرضه $12 - x^2 = 12 - 4 = 8$

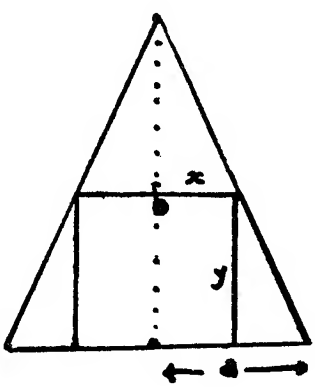
والمساحة ٣٢ .

مثال ٥ ـ ٣ ـ ٤ :

أثبت أن حجم أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{4}{9}$ حجم المخروط .

الحل :

نفرض أن طول نصف قاعدة المخروط « a » وارتفاعه « b » وحجمه « V_1 » وبذلك يكون لدينا $V_1 = 1/3\ \pi a^2 b$



ونفرض كذلك أن طول نصف قطر قاعدة الاسـطوانة « x »
وارتفاعها « y » وحجمها « V_2 » وبذلك يكونن لدينا $V_2 = \pi x^2 y$
ومن تشابه المثلثات فى الشكل نجد أن :

$$\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}$$

$$\therefore \quad y = \frac{b}{a}(a - x) = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

وبالتعريض بقيمة « y » فى V_2

$$\therefore \quad V_2 = \pi x^2 b\left(1 - \frac{x}{a}\right) = \pi b\left(x^2 - \frac{x^3}{a}\right) \quad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{dV_2}{dx} = \pi b \left(2x - 3\frac{x^2}{a}\right) \quad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2V_2}{dx^2} = \pi b\left(2 - 6\frac{x}{a}\right) \quad (3)$$

V_2 لها نهاية عظمى اذا كانت $\frac{dV_2}{dx} = 0$, $\frac{d^2V_2}{dx^2} < 0$ ∴ من المعادلة (٢)

$$\therefore \quad \pi b\left(2x - 3\frac{x^2}{a}\right) = \pi b x\left(2 - \frac{3x}{a}\right) = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \ , \ x = \frac{2}{3} a$$

وبالتعويض بهـذه القيم للمتغير « x » فى المعادلة (٣) نجـد ان

$\frac{d^2V_2}{dx^2} > 0$ عندما $x = 0$

بينما $\frac{d^2V_2}{dx^2} < 0$ عندما $x = \frac{2a}{3}$

$\therefore$ حجم الاسطوانة اكبر مايمكن عندما $x = \frac{2}{3}a \; , \; y = \frac{1}{3}b$

$$\therefore \quad V_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 b \, ,$$

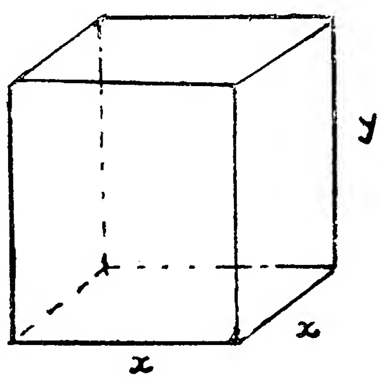
$$V_2 = \pi x^2 y = \pi \cdot \frac{4}{9}a^2 \cdot \frac{1}{3} b = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4}{9} a^2 b$$

$$\therefore \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{4}{9} \quad \therefore \quad V_2 = \frac{4}{9} V_1$$

اى ان حجم الاسطوانة $= \frac{4}{9}$ حجم المخروط .

مثال ٥ ـ ٣ ـ ٥ :

خزان ماء على شكل متوازى مستطيلات مربع القاعدة ومفتوح من أعلى سعته $32 \ m^2$ من الماء . أوجد أبعاد الخزان التى تجعل تكاليف صنعه أقل مايمكن .



الحــل :

نفرض أن طول ضلع القاعدة = « x » والارتفــاع « y » والحجــم « V » فيكون لدينا $V = x^2 y = 32$

$$\therefore \quad y = \frac{32}{x^2}$$

وتكون التكاليف اقل مايمكن عندما تكون مساحة السطح اقل مايمكن ونفرض ان مساحة السطح « S » فيكون :

مساحة السطح = مساحة القاعدة + مساحة الأربع اوجه =

$$\therefore \quad S = 4xy + x^2$$

$$= 4x \cdot \frac{32}{x^2} + x^2 = \frac{128}{x} + x^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad S' = -\frac{128}{x^2} + 2x \qquad (2)$$

$$\therefore \quad S'' = \frac{256}{x^3} + 2 \qquad (3)$$

S لها نهاية صغرى عندما $S' = 0$, $S'' > 0$ وباستخدام (٢)

$$\therefore \quad -\frac{128}{x^2} + 2x = 0 \qquad \therefore \quad 2x^3 = 128 \qquad \therefore \quad x^3 = 64$$

$$\therefore \quad x = 4 \quad \therefore \quad y = \frac{32}{16} = 2$$

∴ طول ضلع قاعدة الخزان يجب ان يكون 4 m , ارتفاعه 2 m .

مثال ٥ ــ ٣ ــ ٦ :

حجرة مربعة يراد دهان الحوائط بدهان يتكلف المتر المربع منه 10.8 قرش ويراد دهان السقف بدهان يتكلف المتر المربع منه 12.5 قرش .

أوجد ابعاد الغرفة لكى تكون التكاليف أقل مايمكن علما بأن سعة الغرفة 216 مترا مكعبا .

الحـــل :

نفرض أن طول الغـــرفة هو « x » مترا وارتفاعهـــا هو « y » مترا . ونظرا لأن الغرفة مربعة الأرضية فيكون لدينا

$x^2 y = 216$ ومنه فان $y = \frac{216}{x^2}$

ونفرض كذلك أن تكاليف الدهان هى « S »

$$\therefore \quad S = 4 \, x \, y \, (10.8) + x^2 \, (12.5)$$

$$S = 4 \, (10.8) \, (\frac{216}{x}) + 12.5 \, x^2 \qquad (1)$$

$$\frac{dS}{dx} = - 4 \, (10.8) \, (\frac{216}{x^2}) + 25 \, x \qquad (2)$$

$$\frac{d^2S}{d^2x} = + 8 \, (10.8) \, (\frac{216}{x^3}) + 25 \qquad (3)$$

وتكون تكاليف الدهان أقل مايمكن عندما تكون $\frac{dS}{dx} = 0$, $\frac{d^2S}{dx^2} \rightarrow 0$

فمن المعادلة (٢) نجد أن :

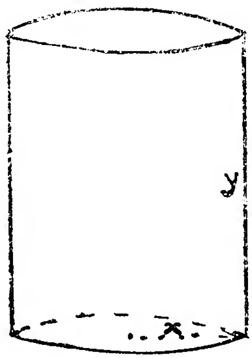
$$x^3 = \frac{4 \, (216) \, (10.8)}{25} = \frac{(4) \, (4) \, (4) \, (27) \, (216)}{1000}$$

$$= \frac{(4^3) \, (3)^3 \, (6)^3}{(10)^3}$$

$$\therefore \quad x = 7.2 \text{ m} \, , \, y = \frac{216}{(7.2) \, (7.2)} = \frac{25}{6} = 4 \frac{1}{6} \text{ m}$$

مثال ٥ ـ ٣ ـ ٧ :

يراد عمل علبة من الصفيح لتعبئة كمية من العسل بشرط ان العلبة تســـــع $250 \pi \ cm^3$ من العسل . فاذا كانت هذه العلبة على شـــكل اسطوانة دائرية قائمة مقفلة من جهتيها . اوجد أبعادها حتى تكون تكاليف الصنع أقل مايمكن .



الحــل :

نفرض ان طول نصف قطـــر قاعـــدة الاسطوانة هو x (cm) وارتفاعها y (cm) وحجمها هو $V \ cm^3$

$$\therefore \quad V = \pi x^2 y = 250 \pi$$

$$\therefore \quad y = \frac{250}{x^2}$$

وعليه ان مساحة سطح العلبة « S » هو

$$\therefore \quad S = 2 \pi x y + 2 \pi x^2$$

$$= 2 \pi \frac{250}{x} + 2 \pi x^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{dS}{dx} = - \pi \frac{500}{x^2} + 4 \pi x \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{1000 \pi}{x^3} + 4 \pi \qquad (3)$$

فتكون تكاليف الصنع اقل مايمكن عندما تكون مساحة السطح اقل مايمكن .

أى عندما تكون S لها نهاية صغرى . اى عندما تكون

$$\frac{d^2S}{dx^2} > 0 \, , \, \frac{dS}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{-500\,\pi}{x^2} + 4\,\pi\,x = 0 \quad \therefore x^3 = 125 \quad \therefore x = 5 \text{ cm}$$

$$\therefore y = \frac{250}{25} = 10 \text{ cm.}$$

وعليه يكون نصف قطر اسطوانة المطلوبة ٥سم بينما ارتفاعها = ١٠سم

بند ٥ ـ ٤ : المعدل الزمنى :

اذا كانت « y » (المتغير التابع) يعتمد على الزمن « t » (المتغير المستقل) فان تفاضل « y » بالنسبة الى « t » أى $\frac{dy}{dt}$ يسمى معدل تغير « y » بالنسبة للزمن « t » . وقد تكون « y » دالة صريحة للمتغير « t » اى ان $y = f(t)$. ولكن فى كثير من الأحيان تكون $y = f(x, u, v, \ldots.)$ فاذا كانت $x, u, v..$ دوال للمتغير « t » يمكن بسهولة عندئذ ايجاد المعدل الزمنى للمتغير « y » بالنسبة للزمن « t » كما سيوضح بالأمثلة .

مثال ٥ ـ ٤ ـ ٦ :

قذفت كرة راسيا الى أعلى فاذا كانت المسافة « S » بعد زمن « t » من بداية الحركة هى $S = 32\,t - 16\,t^2$. اوجد كل من السرعة والعجلة .

الحل :

السرعة « V » هى معدل تغير المسافة « S » بالنسبة الى الزمن « t »

$$V = \frac{dS}{dt} = 32 - 32\,t$$

العجلة « g » هى معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن « t »

وبذلك نجد أن :-
$$g = \frac{dV}{dt} = -32$$

مثال ٥ ــ ٤ ــ ٢ :

اذا كانت « A » هى مساحة كرة نصف قطرها « r » اوجد $\frac{dA}{dt}$

بدلالة r , $\frac{dr}{dt}$.

الحــل :

$$A = \pi r^2$$

تفاضل طرف المعادلة السابقة بالنسبة الى « t » فنحصـــــل على

$$\frac{dA}{dt} = 2 . \pi r \frac{dr}{dt}$$

مثال ٥ ــ ٤ ــ ٣ :

اذا كان الحجم « V » هو حجم الكرة التى نصف قطرها « r »

اوجد $\frac{dV}{dt}$ بدلالة r , $\frac{dr}{dt}$

الحــل :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

تفاضل المعادلة السابقة بالنسبة الى

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi . 3 r^2 \frac{dr}{dt} = 4 \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

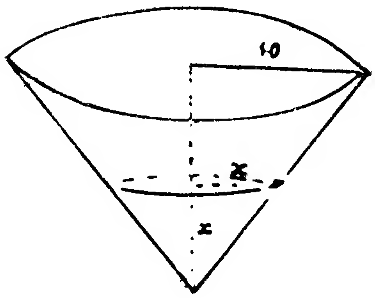
مثال ٥ ــ ٤ ــ ٤ :

يســـقط سائل فى اناء مخروطى الشـــكل بمعدل $10 \ ft^3/min$ فاذا كان نصف قطر قاعدة الاناء يساوى الارتفاع . أوجــد معدل ارتفاع السائل فى المخروط عندما يكون ارتفاع السائل يساوى $5 \ ft$

الحـــل :

نفرض ان نصف قطر السائل (على شكل مخروطى)

= الارتفاع = X



$$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi x^3$$

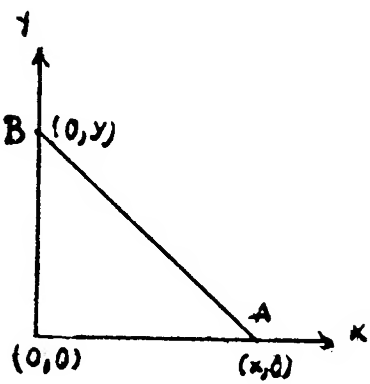
$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = \pi x^2 \frac{dx}{dt}$$

وحيث ان $\frac{dV}{dt} = 10$ فانه عندما يكون $x = 5$ نحصل على

$$\therefore \quad 10 = \pi \; . \; 25 \; . \frac{dx}{dt} \quad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{5\pi} \text{ ft/min.}$$

مثال ٥ ــ ٤ ــ ٥ :

تتحرك نقطـــــة على محور « x » بسرعة ثابتة a ft/sec بينمـــــا تتحرك نقطـــة « B » اخرى على محور « y » بسرعة ثابتة b ft/sec أوجد معدل تغير المسافة بين B, A عنـــدما تكون « A » عند النقطة (x, 0) وتكون « B » عند النقطة (0, y) . يسمى هـذا المعدل بالسرعة النســـبية للنقطة « A » بالنسبة الى « B » .



الحـــل :

نفرض أن المسافة بين A , B هى « S »

$$\therefore \quad S^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

تفاضل طرفى (١) بالنسبة الى « t »

$$\therefore \quad 2S \frac{dS}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$= 2x . a + 2y . b$$

$$\therefore \quad \frac{dS}{dt} = \frac{x . a + y . b}{S} = \frac{x . a + y . b}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ ft/sec}$$

مثال ٥ ــ ٤ ــ ٦ :

يضغط غاز فى بالون كروى الشكل بمعدل $100 \text{ ft}^3/\text{min}$ فاذا كان ضغط الغاز ثابتا . أوجد معدل ازدياد نصف قطر البالون فى اللحظة التى يكون عندها نصف القطر يساوى 3 ft .

الحل :

نفرض أن حجم البالون « V » ونصف قطره عند اى لحظة « r » وبذلك نجد أن :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

تفاضل المعادلة السابقة بالنسبة الى الزمن « t » فنحصل على :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi . 3 r^2 . \frac{dr}{dt} = 4 \pi r^2 . \frac{dr}{dt}$$

وحيث أن معدل الضغط للغاز ثابت ويساوى ١٠٠ فانه عندما $r = 3$ نحصل على :

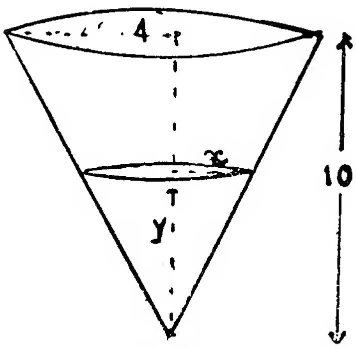
$$\therefore \quad 100 = 4 \pi . 9 . \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = \frac{25}{9 \pi} \text{ ft/min}$$

مثال ٥ ــ ٤ ــ ٧ :

يتسرب ماء من خزان مخروطى راسه الى اسفل، وقطر قاعدته 8 ft وعمقه 10 ft بمعدل ثابت قدره $5\ ft^3/min$

اوجد معدل انخفاض سطح الماء فى الخزان عند اللحظة التى يكون عندها عمق الماء 6 ft



الحل :

من الشكل ومن تشابه المثلثات نجد أن :

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{10} \quad \therefore \quad x = \frac{2}{5} y$$

نفرض ان حجم الماء فى المخروط عند اى لحظة ما هو « V » ومنه ينتج :

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{4}{25} y^3$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3} \pi \times \frac{4}{25} \times 3 y^2 \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{4}{25} \pi y^2 \frac{dy}{dt}$$

وحسب معطيات المثال نجد :

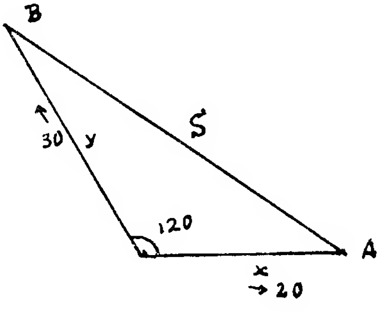
$$\therefore \quad 5 = \frac{4}{25} \pi \cdot 36 \cdot \frac{dy}{dt} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dt} = \frac{125}{144 \pi} \text{ ft/min.}$$

مثال ٥ ــ ٤ ــ ٨:

تبحر سفينتان « B , A » مبتعدتان عن النقطة « 0 » فى اتجاهين بحيث ان الزاوية بينهما $AOB = 120^\circ$. ماهو معدل تغير البعد بينهما فى اللحظة التى عندها OA = 8 miles وكذلك OB = 6 miles وكانت السفينة « A » تبحر بمعدل 20 miles/hr والسفينة « B » تبحر بمعدل 30 mile/hr

الحــل :

نفرض أنه عند أى لحظة ما كانت السفينة « A » تبعد مسافة قدرها « x » عن نقطة « 0 » . وكانت السفينة « B » تبعد مسافة « y » عن نقطة « 0 ». وكذلك أن المسافة « AB » هى « S »



$$\therefore \quad S^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120$$

$$= x^2 + y^2 + 2xy\cos 60 = x^2 + y^2 + xy \qquad (1)$$

تفاضل (١) بالنسبة الى « t »

$$\therefore \quad 2S\frac{dS}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$= (2x + y)\frac{dx}{dt} + (2y + x)\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

عندما $x = 8 , y = 6$ فان $S^2 = 64 + 36 + 48$

$$\therefore \quad S = 2\sqrt{37} ,$$

فبالتعويض فى (٢) نحصل على :

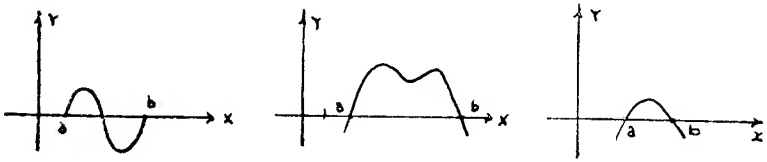
$$\therefore \quad \frac{dS}{dt} = \frac{(22)\ (20) + (20)\ (30)}{2\ (2\sqrt{37})} = \frac{440 + 600}{4\sqrt{37}} =$$

$$= \frac{1040}{4\sqrt{37}} = \frac{260}{\sqrt{37}} \text{ mill/hr}$$

بند ٥ ــ ٥ : نظرية القيمة المتوسطة Mean value Theorem :

نظرية ٥ ــ ٥ ــ ١ : نظرية رول Rolle's Theorem :

اذا كانت الدالة « f » دالة مستمرة (متصلة) فى النطاق المقفل $[a, b]$ وقابلة التفاضل فى الحيز المفتوح (a, b) وكانت $f(a) = f(b) = 0$ فانه يوجد على الأقل نقطة واحدة « c » حيث $a < c < b$. عندها تكون $f'(c) = 0$.



شكل ٥ ــ ٥ ــ ١

البرهان :

اولا ــ اما ان الدالة $f(x) = 0$ لجميع قيم « x » فى الحيز $[a, b]$ وفى هذه الحالة ينتج أن $f'(x) = 0$ لجميع قيم « x » وتكون النظرية صحيحة .

ثانيا ــ واما ان الدالة $f(x) \neq 0$ لجميع قيم « x » بين « a , b » . اى أنه قد تكون موجبة او سالبة بين« b, a » أو أن يكون جزءا منها موجبا والجزء الآخر منها سالبا . وفى هذه الحالة يكون نهاية عظمى أو صغرى أو كلاهما معا على الترتيب . فاذا كانت النهايات (نقط الدوران) عند $x = c$ فان $f(c) \neq 0$. تكون $f'(c) = 0$ وبما ان $f(a) = f(b) = 0$ اذا « c » تقع بين « a , b » أى انه $a < c < b$ وهو المطلوب .

وقد تكون « c » لها اكثر من قيمة واحدة وتتعين قيمتها من المعادلة $f'(c) = 0$.

مثال ٥ ــ ٥ ــ ١ :

اذا كانت $y = f(x) = x^2 - 4x$ حيث $a = -2$, $b = 2$ فان $f(-2) = f(2) = 0$ حيث أن هذه الدالة متصلة فى النطاق $[-2 , 2]$ وقابلة للتفاضل فى النطاق $(-2 , 2)$ ومنه ينتج ان $f'(x) = 3x^2 - 4$

وبتطبيق نظرية رول نجد ان $f'(c) = 3c^2 - 4 = 0$ ومنه فان $c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

أى انه توجد نقطتان c_1 , c_2 بين 2 , 2− تكون المماسات عندها موازية لمحور « x » وهاتان النقطتان هما $c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $c_2 = \frac{-2}{\sqrt{3}}$.

نتيجة ٥ ـ ٥ ـ ١ :

اذا كانت f (x) دالة متصلة فى النطاق [a, b] وقابلة للتفاضل فى النطاق (a, b) وكانت f (a) , f (b) مختلفتى الاشارة فانه يوجد جذر واحد على الأقل للمعادلة $f(x) = 0$ أى منحنى هذه الدالة يقطع محور « x » فى نقطة واحدة على الأقل .

مثال ٥ ـ ٥ ـ ٢ :

اثبت أن منحنى الدالة $f(x) = x^3 + 3x + 1$ يقطع محور « x » فى نقطة واحدة فى النطاق $]-1, 0[$ بدون حل المعادلة $f(x) = 0$

الحـل :

$$f(x) = x^3 + 3x + 1 \quad \therefore \quad f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$$

واضح أن $f'(x) > 0$ لجميع قيم « x » الحقيقية . (أى أن الدالة تزايدية دائما) .

$$\therefore \quad f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3 < 0 ,$$

$$\because \quad f(0) = 1 > 0$$

$\therefore$ للمعادلة $f(x) = 0$ جذر واحد فقط بين $(-1 , 0)$ وعليه

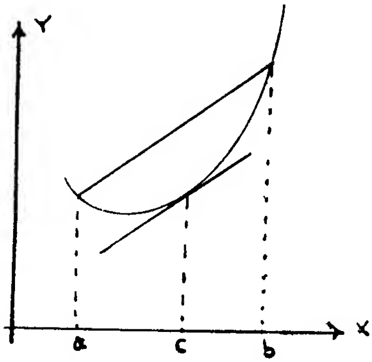
فان منحنى الدالة $f(x) = x^3 + 3x + 1$ يقطع محور « x » فى نقطة واحدة فقط .

نظرية ٥ ـ ٥ ـ ٢ : نظرية القيمة المتوسطة :

اذا كانت $y = f(x)$ دالة متصـلة فى النطاق المقفل [a, b] وكانت قابلة للتفاضل فى النطاق المفتوح (a, b) فانه يوجد نقطة واحدة على الأقل « c » بين « b , a » بحيث يكون :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \qquad (a < c < b)$$

البرهان :



شكل ٥ – ٥ – ٢

نفـــرض أن منحنى الدالة $y = f(x)$ كما هو ممثل فى الشكل ٥ – ٥ – ٢ . فمن المفروض أن هذه الدالة متصلة وقابلة للتفاضل فى النطاق (a, b) لتأخذ الآن الدالة

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}(x - a)$$

وهذه الدالة أيضا متصـلة فى هذا النطاق وزيادة على ذلك فهى تحقق الشروط التالية $g(a) = 0 , g(b) = 0$

وطبقا لنظرية رول فانه توجد على الأقل نقطة « c » مثلا فى النطاق (a, b) بحيث يكون المماس عندها يوازى محور « x » أى $g'(c) = 0$

ولكن

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}$$

وبالتعويض $x = c$ نجد

$$\therefore \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} , \quad a < c < b .$$

مثال ٥ – ٥ – ٣ :

اذا كانت $f(x) = x^3$ حيث $a = -2 , b = 2$ فان $f'(x) = 3x^2$

ومنـه $f'(c) = 3c^2$ وكذلك نجد أن $f(b) = 2^3 = 8$

$f(a) = (-2)^3 = -8$

وبتطبيق نظرية القيمـــة المتوســـطة على الدالة $f(x) = x^3$ (باعتبارها متصلة وقابلة للتفاضل فى النطاق المعطى) نجد أن :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\therefore \quad \frac{8 - (-8)}{2 - (-2)} = \frac{16}{4} = 4 = 3\,c^2$$

$$\therefore \quad c^2 = \frac{4}{3} \qquad \therefore \quad c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

∴ توجد نقطتان $c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $c_2 = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ يكون عندهما المماسان لمنحنى الدالة موازيا للوتر الواصل بين النقطتين $(2, 8)$, $(-2, -8)$.

نتيجة ٥ ـ ٥ ـ ٢ :

اذا كان تفاضل الدالة يساوى صفرا لجميع قيم « x » فى الحيز (a, b) أى أن $x \in (a, b)$ حيث $f'(x) = 0$ فان قيمة الدالة عبارة عن مقدار ثابت فى ذلك الحيز كله .

البرهان :

نفرض ان $f'(x) = 0$ لجميع قيم « x » التى تحقق $x \in (a, b)$ فاذا كانت x_2 , x_1 أى نقطتين فى الحيز بحيث $a < x_1 < x_2 < b$. وبما أن الدالة قابلة للتفاضل لقيم « x » الموجودة بين x_2 , x_1 أى أن $x_1 < x < x_2$ كما ان هذه الدالة عبارة عن دالة متصلة فى الحيز المقفل $[a, b]$, فتطبيق نظرية القيمة المتوسطة نستطيع القول بانه يوجد على الأقل نقطة « c » بين x_2 , x_1

بحيث أن :
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = f'(c)$$

$$\therefore \quad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c)$$

$$\because \quad f'(c) = 0 \quad \therefore \quad f(x_2) - f(x_1) = 0 \quad \therefore \quad f(x_1) = f(x_2)$$

أى ان $f(x)$ هى مقدار ثابت

نتيجة ٥ ــ ٥ ــ ٣ :

اذا كانت f_1 , f_2 دالتين وكان تفاضل كل منهما يساوى $f(x)$

حيث $a < x < b$ اى ان $\frac{d}{dx} f_1(x) = \frac{d}{dx} f_2(x) = f(x)$

لجميع قيم « x » التى تحقق $a < x < b$ فان

$\therefore$ $f_1(x) - f_2(x)$ يساوى مقدار ثابت فى النطاق (a, b)

البرهان :

نفرض ان $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ وبذلك يكون لدينـــا

$0 = \frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dx} = \frac{dF}{dx}$ وباستخدام نتيجة ٥ ــ ٥ ــ ٢ نجد أن

$F(x)$ مقدار ثابت ومنه فان :

$(f_1 - f_2)$ تساوى مقدار ثابت كذلك .

نتيجة ٥ ــ ٥ ــ ٤ :

اذا كانت « f » عبارة عن دالة متصـــلة فى النطـــاق $[a, b]$ وقابلة للتفاضل فى النطاق (a, b) واذا كانت $f'(x)$ موجبـــة فى (a, b) فان « f » تعتبر فى هذه الحالة دالة تزايدية فى النطـــاق $[a, b]$. أما اذا كانت $f'(x)$ ســـالبة فى النطـــاق (a, b) فان « f » تعتبر دالة تناقصية فى الحيز $[a, b]$

البرهان :

اذا كانت x_1 , x_2 اى عـــــددين فى النطـــاق $[a, b]$ بحيث $x_1 < x_2$ وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة نجد أن:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$$

عندما تكون $c \in (x_1, x_2)$ وبما ان اشارة الطرف الأيمن موجبة وذلك لأن $f'(c)$ مفروضة موجبة .

$\therefore$ فلابد وأن تكون $f(x_2) - f(x_1)$ كمية موجبة أيضا . ولهذا فان
$f(x_2) > f(x_1)$

ولهذا فان $f(x)$ عبارة عن دالة تزايدية (راجع ٥ ـ ١ ـ ١)

وبنفس الطريقة اذا كانت $f'(c)$ سالبة فان $f(x_2) - f(x_1)$ عبارة عن كمية سالبة هى الأخرى . ولذلك فان $f(x_2) < f(x_1)$

ولهذا فان $f(x)$ عبارة عن دالة تناقصية (راجع ٥ ـ ١ ـ ٢)

تمــارين

بند ٥ ـ ٦ : تمارين :

١ ـ عين نقط الدوران ونقط الانقلاب لكل من المنحنيـات الآتية وارسمها :

(a) $y = 2 + 3x - x^3$ (b) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$

(c) $y = x + \frac{1}{x}$ (d) $y = 4x^3 - x^4$

(e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ (f) $y = x^4 - 18x^2 + 36$

(g) $y = (x + 4) / \sqrt{x}$ $(x \neq 0)$. (h) $y = x^{2/3}(1 - x)$ $(x \neq 0)$

٢ ـ ارسم منحنى أملس للدالة $y = f(x)$ علمـــا بأن $f(1) = 0$, $f'(x) < 0$ عندما $x < 1$, $f'(x) > 0$ عندما $x > 1$

(ii) ارسم منحنى الدالة $y = f(x)$ عندما $x > 0$ اذا كانت $f(1) = 0$ وكذلك $f'(x) = \frac{1}{x}$ لجميع قيم $x > 0$.

٣ ـ اثبت أن المستطيل الذى مساحته أكبر مايمكن ومحيطه عبارة عن مقدار ثابت هو مربع .

٤ ـ أوجد أبعاد المستطيل الذى مساحته أكبر مايمكن المرســوم داخل دائرة نصف قطرها « r »

٥ ـ قسم العدد٢٠ الى جزئين (قد تكون أعداد غير صــحيحة) بحيث يكون حاصل ضرب العدد الأول فى مربع العدد الثانى أكبر مايمكن .

٦ ـ أوجد العددين الموجبين الذى مجموعهمـــا ٣٦ بحيث يكون

حاصل ضربهما اكبر مايمكن وهل يمكن حل المسألة بحيث يكون حاصل ضربهما اقل مايمكن .

٧ ــ أوجد المعاملات d , c , b , a بحيث يكون للمنحنى $y = a x^3 + x^2 + c x + d$ نهاية عظمى عند $(-1, 10)$ ونقطة انقلاب عند $(1, -6)$.

٨ ــ قذفت كرة عموديا الى أعلى بسرعة 32 ft/sec فكان ارتفاعها بعد مضى زمن قدره t sec هو « S » المعطى بالعلاقة $S = 32 t - 16 t^2$.

عند اى لحظة تكون الكرة على أقصى ارتفاع ؟ وما هو أقصى ارتفاع لها ؟

٩ ــ اذا كانت $f(x) = a x^2 + 2 b x + c$ وكانت $a > 0$ اثبت أن $f(x) > 0$ لجميع قيم « x » الحقيقية بشرط أن يكون $b^2 - a c < 0$ علما بأن للدالة نهاية صغرى .

١٠ ــ يتكون مضمار الجرى من مستطيل وعلى جانبيه نصفى دائرتين . ماهى أبعاد اكبر مستطيل .

١١ ــ تقع رءوس مستطيل على محور « x » ومحور « y » ونقطة الأصل وعلى منحنى الدالة $y = 4 - x^2$ ماهى أبعاد المستطيل ذى اكبر مساحة .

١٢ ــ أوجد أبعاد اكبر مستطيل مرسوم داخل المثلث الذى طول قاعدته 36 ft وارتفاعه 12 ft بحيث ان أحد أضلاع المستطيل يقع على قاعدة المثلث .

١٣ ــ مخروط دائرى ارتفاعه 12 ft ونصف قطر قاعدته 6 ft رسم داخله مخروط آخر بحيث رأسه تقع على مركز قاعدة المخروط الأول وقاعدته توازى قاعدة المخروط الأول . أوجد أبعاد المخروط الثانى بحيث يكون حجمه أكبر مايمكن .

١٤ ــ أوجد حجم أكبر مخروط دائرى يمكن رسمه داخل كرة نصف قطرها « r » .

١٥ ــ أوجد حجم اكبر اسطوانة دائرية يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها « r » .

١٦ ــ أوجد أبعاد صندوق مفتوح يمكن عمله من ورقة مستطيلة الشكل طولها 15 in وعرضها 8 in بحيث يكون حجمه اكبر مايمكن وذلك بنزع أجزاء مربعة الشكل من الأركان .

١٧ ــ صندوق مفتوح وقاعدته مربعة يسع $32\ in^3$ أوجد أبعاده بحيث يلزم اقل مادة ممكنة لصنعه علما بأن الصندوق على شكل متوازى مستطيلات .

١٨ ــ صفيحة زيت اسطوانية دائرية تسع $16\pi\ in^3$ أوجد أبعادها بحيث يلزم أقل مادة ممكنة لصنعها .

١٩ ــ رسم مثلث راسه عند المركز (نقطة الأصل) وقاعدته لاعلى وتوازى محور « x » . فاذا كانت أطراف القاعدة تقع على المنحنى $12y = 36 - x^2$ أوجد مساحة المثلث بحيث تكون اكبر مايمكن .

٢٠ ــ اذا كانت النقطتان « A , B » على جانب واحد من الخط المستقيم « L » فأوجد أقصر مسار بين هاتين النقطتين مارا بنقطة على المستقيم « L » (نظرية الانعكاس) .

٢١ ــ « A » فى وسط السرعة فيه « c » , « B » فى وسط آخر السرعة فيه (c/m) يفصل بينهما الخط المستقيم « L » اوجد اقصر مسار بين النقطتين (« A B » ليس عموديا على « L ») (نظرية الانكسار)

٢٢ ــ ينزلق سلم طوله 26 ft واحد طرفيه على حائط راسى والآخر على الأرض فاذا كان الطرف الأرضى عند لحظة ما معدل ابتعاده عن الحائط هو 4 ft/sec عندما كان على بعد 10 ft أوجد معدل انزلاق الطرف الآخر على الحائط لأسفل فى هذه اللحظة .

٢٣ ـ يصب ماء فى اناء مخروطى راسه لأسفل بمعدل $12\ ft^3/min$ اوجد معدل ارتفاع سطح الماء فى المخروط فى اللحظة التى فيها عمق الماء 6 ft علما بأن ارتفاع المخروط 10 ft ونصف قطر قاعدته 5 ft .

٢٤ ـ يسير رجل طوله 6 ft بسرعة قدرها 5 ft/sec فى اتجاه مصباح يرتفع بمقدار 16 ft عن الأرض . اوجد معدل تغير ظل الرجل .

٢٥ ـ كرة معدنية نصف قطرها 4 in مغطاة بطبقة من الجليد متجانسة السمك فاذا كان الجليد يذوب بمعدل $10\ in^3/min$ أوجد معدل نقص سمك طبقة الجليد عند اللحظة التى سمك الجليد عندها 2 in وكذلك اوجد عند نفس اللحظة معدل تناقص المساحة الخارجية .

٢٦ ـ اثبت أنه اذا ازدادت مساحة دائرية بمعدل ثابت فان محيطها يزداد بمعدل يتناسب عكسيا مع نصف القطر .

٢٧ ـ اسطوانة دائرية قائمة ثابتة الحجم يتمدد نصف قطر قاعدتها بمعدل 1 cm/min اوجد معدل تغير ارتفاع الاسطوانة فى اللحظة التى عندها يكون نصف قطر القاعدة 10 cm والارتفاع 6 cm .

٢٨ ـ اسطوانة دائرية قائمة يزداد نصف قطر قاعدتها بمعدل 2 cm/min ويتناقص ارتفاعها بمعدل 10 cm/min أوجد معدل تغير حجم الاسطوانة فى اللحظة التى يكون فيها نصف قطر القاعدة 10 cm والارتفاع 15 cm

٢٩ ـ بدون حل المعادلة $f(x) = 0$ اثبت أن منحنى الدالة $f(x)$ يقطع محور « x » فى نقطة واحدة فقط فى النطاق المعطى .

(1) $f(x) = x^4 + 3x + 1$ فى النطاق $(-2, -1)$

(ii) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$ فى النطاق $(0, 1)$

(iii) $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 12x - 6$ فى النطاق $(-1, 0)$

٣٠ ــ باستخدام نظرية رول أوجد قيم « x » التى يكون عندها $f'(x) = 0$ للمنحنيات التالية :

(i) $f(x) = \sin x$ $\quad (0, \pi)$.

(ii) $f(x) = \cos x$ $\quad (-\pi/2, \pi/2)$

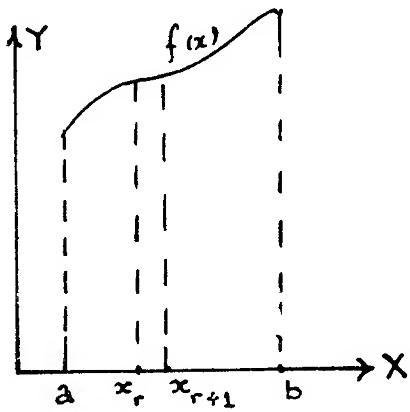
(iii) $f(x) = \sin x$ $\quad (0, 2\pi)$

٣١ ــ عمم نظرية رول عندما $f(a) = f(b) \neq 0$.

الباب السادس

التكامل

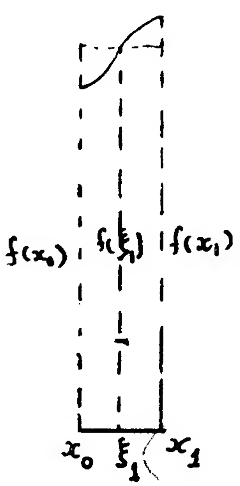
INTEGRATION



شكل ٦ ــ ١ ــ ١

بند ٦ ــ ١ : تعريف التكامل المحدود

لو اننا حاولنا أن نحسب المساحة المحصورة بين المنحنى $f(x)$ والمحور السينى (محور x) فى النطاق $[a, b]$ فان أول شيء يتبادر الى ذهننا هو أن نقسم هذه المساحة الى شرائح صغيرة ونعتبر هذه الشرائح او الأقسام عبارة عن مستطيلات أو أشياء منحرفات ثم تجمع هذه الأقسام على بعضها . ومن الواضح انه كلما كثر عدد هذه التقسيمات وصغرت مساحاتها كلما اقتربنا من المساحة الصحيحة ولاجراء هذه العملية نجرى التالى . نأخذ النقط $\{ x_0 , x_1 , \ldots\ldots , x_n \}$



شكل ٦ ــ ١ ــ ٢

حيث $x_n = b , x_0 = a$ فمن الواضح أن هذه النقط تقسم النطاق $[a, b]$ الى « n » من الأقسام (قد تكون متساوية أو لا تكون) ومن الواضح أن مساحة الشريحة الأولى هى عبارة $f(\xi_1)(x_1 - x_0)$ حيث (ξ_1) نقطة تقع بين x_0 , x_1 كما هو واضح من الشكل فان $f(x_0) < f(\xi_1) < f(x_1)$ باعتبار ان $f(x)$ تزايدية وهكذا بالنسبة لبقية الشرائح وعموما فان

مســـــاحة الشريحة رقم « k » تعطى من $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

ومن الملاحظ أن مجموع مساحات هذه الشرائح تعطى المساحة الكلية وعليه يكون

$$A_a^b(n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

ومن الملاحظ أن المساحة تكون معتمدة على « n » وهو عـــــدد التقسيمات فاذا ماجعلنا هذا العدد « n » يؤول الى مالا نهاية $(n \to \infty$ بحيث أن كل تقسيم تؤول قاعدته الى الصفر أى $\Delta x_k \to 0$ فاننا نحصل على القيمة الصحيحة للمساحة .

$$A_a^b = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

وهى كما نرى عملية من عمليات النهايات ويرمز لهذه النهاية بالرمز التالى :

$$A_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

ويعرف هذا التعريف بتعريف ريمان للتكامل

Riemanian definition of Integration

ومن الواضح أن التكامل من « a » الى « b » للدالة $f(x)$ بالنسبة الى « x » . حسب هذا التعريف تمثل المساحة المحصورة بين المحور السينى والمنحنى للدالة $f(x)$ والمستقيمين $x = b$, $x = a$ وتسمى « a » بالنهاية السفلى و « b » بالنهاية العليا للتكامل . ومن هذا التعريف يمكننا استنتاج النتائج الآتية مباشرة .

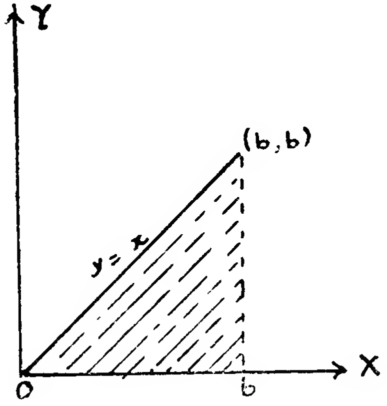
٦ ـ ١ ـ ١ نتائج من تعريف التكامل :

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

حيث $a < c < b$.

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

٦ ـ ١ ـ ٢ امثلة توضيحية :



شكل ٦ ـ ١ ـ ٢

مثال (١) :

من المبـادىء الأولية وتعريف ريمان للتكامل إوجـــــد $\int_0^b x\,dx$ من الواضح ان هذا التكامل يمثل المساحة المحصـــورة بين المستقيم $f(x) = x$ والمحور السينى ونقطة الأصل والخط $x = b$ وهو الجزء المظلل فى الرسم وكمـا هو معروف من مبادىء الهندســـة والحساب فهذه المساحة $= \frac{1}{2} b^2$

نبدأ الآن بتطبيق تعريف التكامل فنـأخـذ المســـافة من $0 \rightarrow b$ ونقسمها الى « n » من الأقسام المتساوية حيث

$$x_0 = 0\ ,\ x_1 = h,\ x_2 = 2h\ ,\ \ldots\ ,\ x_k = kh,\ x_{k+1} = (k+1)h$$

$$x_n = nh = b$$

فمن الواضح أن

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = kh - (k-1)h = h$$

ومن الواضح أن

$$h = \frac{b}{n} \leftrightarrow b = nh$$

عندما $n \rightarrow \infty$ فان $\Delta x_k \rightarrow 0$ لجميع قيم « k »

$$\therefore\ f(x) = x\ \therefore\ f(x_k) = x_k = hk\ ,\ f(x_{k-1}) = (k-1)h$$

اذا كانت

$$x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

$$\therefore\ f(x_{k-1}) = x_{k-1} = (k-1)h < \xi_k$$

$$= f(\xi_k) < f(x_k) = hk$$

وهذه الدالة تزايدية فنجد تبعا لذلك :

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)\, h.h < \sum f(\xi_k)\,\Delta x_k < \sum_{k} k\, h\, .\, h$$

$$(0+1+2+\dots+n-1)\,\frac{b^2}{n^2} < \sum f(\xi_k)\,\Delta x_k < (1+2+\dots+n)\,\frac{b^2}{n^2}$$

$$\frac{(n-1)\,n}{2}\,\frac{b^2}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k < \frac{(n+1)\,n}{2}\,\frac{b^2}{n^2}$$

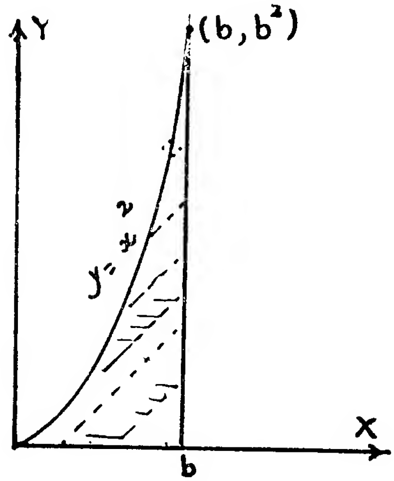
وعند أخذ النهايات نجد الآتى :

$$\frac{b^2}{2} \leqslant \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum f(\xi_k)\,\Delta x_k \leqslant \frac{b^2}{2}$$

وهذا لايتحقق الا اذا اخذنا علامة التساوى فيصير :

$$\therefore \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b x\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum f(\xi_2)\,\Delta x_k = \frac{b^2}{2}$$

كما حسبناها من قبل



شكل ٦ ـ ١ ـ ٤

نتيجة :

$$\int_a^b x\,dx = \int_0^b x\,dx - \int_0^a x\,dx = \tfrac{1}{2}\, b^2 - \tfrac{1}{2}\, a^2$$

مثال (٢) :

احسب بالطرق المبدئية $\int_0^b x^2\,dx$ كما فى المثال السابق نقسم النطاق $[0, b]$ الى « n » قسم . والأقسام هى

$$x_0 = 0,\ x_1 = h,\ \dots,\ x_k = kh,\ \dots,\ x_m = nh = b$$

ومنها $h = \frac{b}{n}$ ثم تكون المتباينتين

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \Delta x_k < \Sigma f(\xi_k) \Delta x_k < \Sigma f(x_k) \Delta x_k$$

حيث $f(x) = x^2$ دالة تزايدية فى هذا النطاق وبالتعويض نجد ان :

$$\therefore \{0 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\} h^2 . h <$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k < (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) h^2 . h$$

$$(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \frac{b^3}{n^3} <$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k < (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \frac{b^3}{n^3}$$

وبأخذ النهايات (راجع مثال ٦ بند ٣ ــ ٣)

$$\therefore \frac{1}{3} b^3 \leqslant \int_0^b f(x)\, dx = \int_0^b x^2\, dx \leqslant \frac{b^3}{3}$$

$$\therefore \int_0^b x^2\, dx = \frac{1}{3} b^3$$

نتيجـة :

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3$$

٦ ــ ١ ــ ٣ تابع تعريف التكامل :

مما سبق يتضح انه يمكننا كتابة

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

اذا وضعنا بدلا من القيمة « b » قيمة أخرى « x » مثلا فيصير

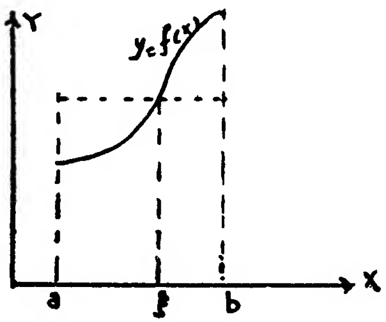
$$\int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a)$$

وكما هو واضح فان الطرف الأيمن دالة فى « x » ويعتبر F (a) مقدار ثابت .

بند ٦ ـ ٢ : نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :

تنص هذه النظرية على انه اذا كان لدينا المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f (x) والمحور السينى والمستقيمين $x = a$, $x = b$.

أى نتيجة التكامل للدالة f (x) بالنسبة الى « x » فى النطاق [a, b] فانه يمكننا ان نجد مستطيلا مساحته تكافىء هذه المساحة وهذه النظرية يمكن صياغتها رياضيا فى الصورة التالية :



شكل ٦ ـ ٢ ـ ١
نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\, f(\xi)$$

حيث $a \leq \xi \leq b$.

بند ٦ ـ ٢ ـ ١ امثلة :

مثال (١) :

حقق نظرية القيمة المتوسطة لتكامل الدالة « 2 x » فى النطاق [1, 3]

الحل أولا : نوجد التكامل

$$\therefore \quad \int_1^3 2x\, dx = 3^2 - 1^2 = 8$$

ثانيا : هذا المقدار يجب ان يساوى $(3 - 1)\, 2\, \xi$

$$\therefore \quad 8 = 4\xi \quad \therefore \quad \xi = 2 \,,\ 1 < 2 < 3 \,.$$

مثال (٢) :

حقق نظرية القيمة المتوسطة لتكامل الدالة $3x^2$ فى النطاق $[1, 5]$

الحــل :

نوجد قيمة التكامل $\int_1^5 3x^2\,dx = 3\left[\frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] = 124 \quad \therefore$

هذا المقدار يجب ان يساوى $3\xi^2(5-1)$

$$\therefore 12\xi^2 = 124 \quad \therefore \xi^2 = \frac{124}{12} = \frac{31}{3} \quad \therefore \xi = \sqrt{\frac{31}{3}}$$

ومن الواضح ان $1 < \sqrt{\frac{31}{3}} < 5.$

بند ٦ ــ ٣ : النظرية الأساسية للتكامل :

اذا كان $F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx$ فى النطاق $[a, b]$, $f(x)$ دالة متصلة فان $F'(x) = f(x)$ لجميع قيم « x » الواقعة فى النطاق (a, b).

البرهان : لنفترض أن لدينا النقطتين x , $x + \Delta x$ فنجد أن :

$$F(x + \Delta x) - F(a) = \int_a^{x + \Delta x} f(x)\,dx,$$

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx$$

بالطرح واستخدام نتيجة (١) أو من التعريف فنرى ان :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x + \Delta x} f(x)\,dx$$

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة للتكامل نجد ان :

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(\xi).(x + \Delta x - x) = f(\xi).(\Delta x)$$

حيث $x < \xi < x + \Delta x$ وبالقسمة على « Δx » وأخذ النهايات عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

وهذه هى النظرية الأساسية فى حساب التفاضل والتكامل وهى تنص على أنه اذا كانت $F(x)$ هى الدالة الناتجة من تكامل الدالة $f(x)$ بالنسبة الى « x » فى النطاق [a, b] فان $f(x) = \frac{d}{dx}(F(x))$ فى النطاق (a, b) .

وهذه النظرية تربط ماتعلمه القارىء فيما سبق من أبواب التفاضل بالتكامل الذى سقناه الآن . فمثلا :

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad x^2 - a^2 = \int_a^x 2t\,dt$$

ومن الملاحظ هنا ان $F(x) = x^2 - a^2$ بينما $f(x) = 2x$.

ويمكننا اضافة اى مقدار ثابت الى الدالة $F(x)$ فان هذا لن يغير من الدالة $f(x)$ لأننا كما نعلم أن تفاضل المقدار الثابت = صفر .

مثال ٦ ــ ٣ ــ ١ :

بدون اجراء عملية التكامل أوجد $\frac{dF}{dx}$

حيث $F(x) = \int_1^x \sqrt{1 + t^2}\,dt$

الحــل :

باستخدام النظرية الأساسية فنجد ان

$x = x,\ a = 1,\ f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ فنحصل على :

$$\frac{dF}{dx} = f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

٦ ــ ٣ ــ ١ نتيجة

اذا كانت النهاية العليا أو النهاية السفلى دالة فى « x » فان :

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\right\} = f(v)\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx}$$

البرهان :

يمكننا تطبيق النظرية الأساسية مع بعض التحوير . وذلك كما يلى :

حسب النظرية الأساسية يمكننا كتابة

$$\int_u^v f(x)\, dx = F(v) - F(u)$$

حيث u, v دوال فى « x » فباجراء التفاضل بالنسبة الى « x » نحصل على :

$$\frac{d}{dx}\left[\int_u^v f(t)\, dt\right] = \frac{dF}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

وحسب النظرية الأساسية نجد أن التفاضل يصبح

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\right] = f(v)\cdot\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx}$$

مثال ٦ ــ ٣ ــ ٢ :

بدون اجراء عملية التكامل أوجد تفاضل الدالة

$$F(x) = \int_x^{x^2} (1 + t^2)\, dt .$$

الحــل :

من الواضح هنا أن النهاية السفلى تعتمد على « x » وهى $u = x$ وكذلك النهاية العليا $v = x^2$ بينما $f(t) = 1 + t^2$.

وبتطبيق النتيجة السابقة نحصل على

$$\frac{dF}{dx} = [1 + (x^2)^2]\ (2x) - (1 + x^2). \qquad (1)$$

$$= 2x^5 - x^2 + 2x - 1$$

ولنترك للقارىء اجراء هذا التكامل البسيط ثم بعد ذلك القيام بعملية التفاضل والتأكد من النتيجة . وننطلق الى تعريف التكامل الآتى :

بند ٦ ـ ٤ التكامل غير المحدود Indefinite integration :

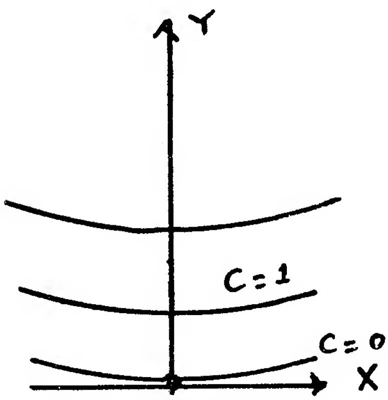
مما سبق يمكن ايراد التعريف التالى للتكامل غير المحدود ويرمز له بالرمز $\int f(x)\, dx$ بدون كتابة قيم على حدى علامة التكامل ويكون الناتج دالة فى « x »

$$F(x) = \int f(x)\, dx + C$$

والمقدار « C » ها هنا مقدار ثابت يسمى بثابت التكامل فمثلا اذا كان $f(x) = 2x$ فنجد

$$F(x) = \int 2x\, dx = x^2 + C$$

وهى تمثل مجموع من المنحنيات (منحنى القطع المكافىء) وهى كلها متوازية ولكن رءوسها مزاحة على المحور الصادى كما هو ظاهر فى الرسم ومن الواضح أن تعيين قيمة معينة للثابت « C » يعين منحنيا واحدا ولكن لو اخذنا المماسات لهذه المنحنيات عند احداثى معين لـ « x » مثلا نجد أن المماسات كلها تتوازى اى أن $F'(x)$ لاتتغير لهذه المنحنيات (أى لاتعتمد على الثابت « C ») وسنسوق الآن مثلا على تعيين ثابت التكامل .



شكل ٦ ـ ٤ ـ ١

مثـال :

اذا كان ميل المماس عند اى نقطة (x , y) يعطى من $\frac{dy}{dx} = 2x$ فأوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $(2, 1)$

الحـل :

حيث $\frac{dy}{dx} = 2x$ يمكن وضعها فى الصورة التكاملية $y = x^2 + C$

ولكن المنحنى يمر بالنقطة (2, 1) فهى تحققه $\therefore \; 1 = 4 + C$

ومنها نجد أن $C = -3$ وتكون معادلة المنحنى هى $y = x^2 - 3$

بند ٦ ــ ٥ قواعد التكامل :

١ ــ أولى هذه القواعد هى $\int du = u + c$

وهذا تطبيق مباشر من الصورة التكاملية للدالة ١ تكون $\dfrac{du}{du} = 1$

٢ ــ اذا كان « k » ثابت فان علامة التكامل والثابت متبادلتان

$$\int k\, du = k \int du = k\, u + c$$

٣ ــ التكامل لدالة عبارة عن مجموع جبرى لدوال يساوى المجموع الجبرى لتكاملات هذه الدوال اى ان علاقة التكامل تقبل التوزيع بالنسبة للجمع الجبرى وذلك تطبيق مباشر لقوانين الجمع فى التفاضلات

$$d\,(U_1 + U_2 + \dots + U_n) = d\,U_1 + d\,U_2 + \dots + d\,U_n$$

$$\therefore \int (d\,U_1 + d\,U_2 + \dots + d\,U_n) = \int d\,U_1 + \dots + \int d\,U_n$$

٤ ــ من قاعدة تفاضل دالة الدالة $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

تصاغ هذه القاعدة فى الصورة التاكملية الآتية :

$$\int \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = \int \frac{du}{dy}\, dy = \int du$$

وهذا مايعرف بالتكامل بالتعويض وهو استخدام تعويض معين ليسهل اجراء التكامل .

وسيرى القارىء عديدا من الأمثلة على هذه التعويضات .

بند ٦ ــ ٦ بعض التكاملات القياسية :

مما تقدم يمكننا الشروع فى اجراء بعض التكاملات وذلك بمعاملتها كأنها عملية عكسية لعملية التفاضل وذلك استنادا الى النظرية الأساسية للتكامل التى اثبتناها انفا .

٦ – ٦ – ١ تكامل الدالة x^n :

كما ضربنا المثال السابق

$$2x = \frac{d}{dx} x^2$$

التى يمكن وضعها فى الصورة التكاملية $\int_a^x 2x\,dx = x^2 - a^2$

يمكننا الآن ان نضعها فى صورة التكامل غير المحدود التالية :

$$\int 2x\,dx = x^2 + C \quad \text{or} \quad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

وعموما نرى أن :

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1)$$

وذلك لأن صورتها التفاضلية المعروفة هى

$$\frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1)\,x^n$$

وعليه تكون صورتها التكاملية هى الصورة السابقة .

٦ – ٦ – ١ أمثلة :

مثال (١) :

أوجد تكاملات الدوال الآتية :

(i) $\int 3x^2\,dx$ (ii) $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$ (iii) $\int at^3\,dt$

الحـل :

$$\text{(i)} \quad \int 3x^2\,dx = 3\frac{x^{2+1}}{(2+1)} + C = x^3 + C$$

$$\text{(ii)} \quad \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$(iii) \quad a \int t^3 \, dt = a \frac{t^4}{4} + C$$

مثال (٢) :

عين السرعة « V » والمســـــافة « S » عنــد اى زمن « t » لجسم يتحرك بعجلة ثابتة علما بأن $V = V_0$, $S = S_0$ عند بداية الحركة $t = 0$

الحــل :

معدل تغير السرعة بالنســـبة الى الزمن $g = \frac{dV}{dt}$ ومنه فان $dV = g\,dt$ نجرى الآن عملية التكامل .

لأن « g » مقدار ثابت .

$$\therefore \int dV = g \int dt$$

$$\therefore V = gt + c$$

عندما $t = 0$ فان $V = V_0$ ومنها فان $c = V_0$

$$\therefore V = gt + V_0$$

$\because$ السرعة « V » هى معدل تغير المسافة « S » بالنسبة الى الزمن

$$\therefore \frac{dS}{dt} = gt + V_0$$

تكامل طرفى المعادلة السابقة

$$\therefore \int dS = \int (gt + V_0)\, dt$$

$$\therefore S = \tfrac{1}{2} gt^2 + V_0 t + C_1$$

عندما $t = 0$ فان $S = S_0$ ومنها فان $C_1 = S_0$

$$\therefore S = \tfrac{1}{2} g t^2 + V_0 t + S_0$$

مثال (٣) :

اوجد قيمة $\int (x^2 - \sqrt{x})\, dx$

الحـل :

$$\int (x^2 - \sqrt{x})\, dx = \int (x^2 - x^{\frac{1}{2}})\, dx$$

$$= \int x^2\, dx - \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

مثال (٤) :

اوجد قيمة $\int (2 - 7\,t)^{2/3}\, dt$

الحـل :

نضع $u = 2 - 7\,t$ ومنها فان $du = -7\, dt$ اذا $dt = \frac{-1}{7}\, du$

$$\therefore \int (2 - 7\,t)^{2/3}\, dt = \int u^{2/3}\, (-1/7\, du) = -\frac{1}{7} \int u^{2/3}\, du$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{u^{5/3}}{5/3} + C = -\frac{3}{35} (2 - 7\,t)^{5/3} + C$$

بعد التعويض عن « u »

مثال (٥) :

اوجد قيمة $\int \sqrt{2\,x^2 + 1}\, .\, x\, dx$

الحـل :

نضع $u = 2\,x^2 + 1$ ومنها فان $du = 4\,x\, dx$ اذا $x\, dx = \frac{1}{4}\, du$

$$\therefore \int \sqrt{2\,x^2 + 1}\, .\, x\, dx = \int u^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{4}\, du = \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + c \quad = \frac{1}{6} u^{3/2} + c$$

وبالتعويض عن « u » نجد

$$= \frac{1}{6} (2x^2 + 1)^{3/2} + c.$$

مثال (٦) :

اوجد قيمة $\int t^2 (1 + 2t^3)^{-2/3} dt$

الحـل :

نضع $u = 1 + 2t^3$ ومنه فان $du = 6t^2 dt$

اذا $\frac{1}{6} du = t^2 dt$

$$\therefore \int t^2 (1 + 2t^3)^{-2/3} dt = \int u^{-2/3} \cdot \frac{1}{6} du$$

$$= \frac{1}{6} \int u^{-2/3} du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^{(1/3)}}{(1/3)} + c$$

$$= \frac{1}{2} (1 + 2t^3)^{1/3} + c.$$

مثال (٧) :

اوجد قيمة

$$\int \frac{(z + 1)\, dz}{\sqrt[3]{z^2 + 2z + 2}}$$

الحـل :

نضع $u = z^2 + 2z + 2$ فيكون $du = (2z + 2)\, dz$

اذن $\frac{1}{2} du = (z + 1)\, dz$

$$\therefore \int \frac{(z+1)\,dz}{\sqrt{z^2+2z+2}} = \int u^{-1/2} \cdot \tfrac{1}{2}\, du = \tfrac{1}{2} \int u^{-1/2}\, du$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{u^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{4} (z^2 + 2z + 2)^{2/3} + C$$

بند ٦ ــ ٦ ــ ٢ تكامل الدوال المثلثية :

سبق أن درسنا تفاضل الدوال المثلثية التى يمكن تلخيصها وكتابتها فى الصور التالية :

1) $d(\sin u) = \cos u\, du$

2) $d(\cos u) = -\sin u\, du$

3) $d(\tan u) = \sec^2 u\, du$

4) $d(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u\, du$

5) $d(\sec u) = \sec u \tan u\, du$

6) $d(\operatorname{cosec} u) = \operatorname{cosec} u \cot u\, du$

كذلك يمكن كتابة تكامل الدوال المثلثية كالتالى :

1) $\int \sin u\, du = -\cos u + c$

2) $\int \cos u\, du = \sin u + c$

3) $\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$

4) $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$

5) $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + c$

6) $\int \mathrm{scs}\, u \cot u\, du = -\csc u + c.$

٦ ــ ٦ ــ ٢ ــ ١ أمثلة :

مثال (١) :

أوجد قيمة $\int \cos 2x \,.\, dx$

الحــل :

نضع $u = 2x$ ومنه يكون $du = 2\,dx$ ينتج أن $dx = \frac{1}{2}\,du$

$$\therefore \int \cos 2x\,dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

مثال (٢) :

أوجد قيمة $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}\,dx$

الحــل :

نضع $u = \sin 2x$ ومنه يكون $du = \cos 2x \cdot 2\,dx$

وينتج ان :

$$\frac{1}{2}\,du = \cos 2x\,dx$$

$$\therefore \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}\,dx = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-3}\,du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{(-2)} + c = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin^2 2x} + c$$

مثال (٣) :

أوجد قيمة $\int x \sin(2x^2) .\,dx$

الحــل :

نضع $u = 2x^2$ ومنه ينتج أن $du = 4x\,dx$

ومنه فان : $\frac{1}{4}\,du = x\,dx$

$$\therefore \int x \sin 2x^2 .\,dx = \int \sin u \cdot \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}\int \sin u\,du$$

$$= \frac{1}{4}(-\cos u) + c = -\frac{1}{4}\cos 2x^2 + c$$

مثال (٤) :

أوجد قيمة $\int \sqrt{2 + \sin 3t}\,\cos 3t\,dt.$

الحـــل :

نضع $u = 2 + \sin 3t$ وعليه فان $du = \cos 3t \cdot 3\,dt$

$$\therefore \quad \frac{1}{3} du = \cos 3t\, dt$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{2 + \sin 3t} \cdot \cos 3t\, dt =$$

$$\int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= (2/9)\ (2 + \sin 3\ t)^{3/2} + C$$

مثال (٥) :

$$\int \sin 3\ x \cos 2\ x\ de \quad = \tfrac{1}{2} \int (\sin 5\ x + \sin x)\ dx$$

وذلك باستخدام قوانين حساب المثلثات

$$= \tfrac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{5} \cos 5\ x - \cos x \right\} + c$$

مثال (٦) :

$$\int \sin^2 3\ x\ dx \quad = \tfrac{1}{2} \int (1 - \cos 6\ x)\ dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\{ x - \frac{1}{6} \sin 6\ x \right\} + c$$

مثال (٧) :

$$\int \cos^2 7\ x\ dx \quad = \tfrac{1}{2} \int (1 + \cos 14\ x)\ dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[x + \frac{1}{14} \sin 14\ x\right] + c$$

مثال (٨) :

$$\int \cos 5\ x \cos 2\ x\ dx \quad = \tfrac{1}{2} \int (\cos 7\ x + \cos 3\ x)\ dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{1}{7} \sin 7\ x + \frac{1}{3} \sin 3\ x \right\} + c$$

مثال (٩) :

$$\int \sin 3x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x\right] + c$$

بند ٦ ـ ٦ ـ ٣ تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية :

لقد سبق ان درسنا تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية التى يمكن تلخيصها كما يلى :

1) $de^x = e^x \, dx$

2) $d\, e^{ax+b} = a \cdot e^{ax+b}$

3) $de^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx$

4) $d(\ln x) = \frac{1}{x} \cdot dx$

5) $d\{\ln(ax+b)\} = a \cdot \frac{1}{ax+b} \, dx$

6) $d\{\ln f(x)\} = \frac{1}{f(x)} f'(x) \, dx$

كذلك يمكن كتابة بعض الدوال فى صورة الدوال الأسية واللوغاريتمية كالتالى :

1) $\int e^x \, dx = e^x + c$

2) $\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + c$

3) $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c$

4) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$

5) $$\int \frac{1}{a\,x + b}\,dx = \frac{1}{a} \ln\,(a\,x + b) + c$$

6) $$\int \frac{f'\,(x)}{f\,(x)}\,dx = \ln \{\, f\,(x) \,\} + c$$

٦ ــ ٦ ــ ٣ ــ ١ أمثلة :

مثال (١) :

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\,e^{3x} + c$$

مثال (٢) :

$$\int (e^{x} + e^{-x})^{2}\,dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\,e^{2x} + 2\,x - \tfrac{1}{2}\,e^{-2x} + c$$

مثال (٣) :

$$\int e^{2x-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\,e^{2x-1} + c$$

مثال (٤) :

$$\int \frac{e^{x}}{e^{x} - 1}\,dx$$

بوضــع $u = e^{x} - 1$ فأن $du = e^{x}\,dx$

$$\therefore \int \frac{e^{x}}{e^{x} - 1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln\,(u) + c = \ln\,(e^{x} - 1) + c$$

مثال (٥) :

$$\int e^{\tan x}\,.\,\sec^{2} x\,dx$$

بوضــع $u = \tan x$ فيكون $du = \sec^{2} x\,dx$

$$\therefore \int e^{\tan x}\,.\,\sec^{2} x\,dx = \int e^{u}\,du = e^{u} + c = e^{\tan x} + c$$

مثال (٦) :

$$\int e^{x^3 - 3x^2 + 3}(3x^2 - 6x)\,dx$$

بوضع $u = x^3 - 3x^2 = 3$ فيكون $du = (3x^2 - 6x)\,dx$

$$\therefore \int e^{(x^3 - 3x^2 + 3)}(3x^2 - 6x)\,dx = \int e^u\,du = e^u + c$$

$$= e^{x^3 - 3x^2 + 3} + c$$

مثال (٧) :

$$\int a^x \ln a\,dx = \int e^{x\,(\ln a)} \ln a\,.\,dx =$$

$$\int e^u\,du = e^u + c = e^{x \ln a} + c = a^x + c$$

وذلك بوضع. $u = e^{x \ln a}$

مثال (٨) :

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$$

مثال (٩) :

اوجد تكاملات الدوال الآتية :

(i) $\int \tan u\,du$ (ii) $\int \cot u\,du$

(iii) $\int \sec u\,du$ (iv) $\int \csc u\,du$

الحـل :

1) $$\int \tan u\,du = \int \frac{\sin u}{\cos u}\,du$$

$$= -\int \frac{-\sin u}{\cos u}\,du = -\ln|\cos u| + c$$

وذلك لان البسط عبارة عن تفاضل المقام

$$= \ln\{\cos u\}^{-1} + c = \ln|\sec u| + c$$

2) $$\int \cot u\,du = \int \frac{\cos u}{\sin u}\,du = \ln|\sin u| + c$$

3) $\int \sec u \, du = \int \sec u \dfrac{(\sec u + \tan u)}{(\sec u + \tan u)} du =$

$$\int \frac{(\sec^2 u + \sec u \tan u)\, du}{(\sec u + \tan u)}$$

وذلك لأن البسط عبارة عن تفاضل المقام

$$= \ln | \sec u + \tan u | + c$$

4) $\int \csc u \, du = \int \csc u \dfrac{(\csc u - \cot u)}{(\text{cst } u - \cot u)} du$

$$= \int \frac{(\csc^2 u - \csc u \cot u)}{(\csc u - \cot u)} du = \ln | \csc u - \cot u | + c$$

٦ ـ ٦ ـ ٤ تكاملات تظهر فيها الدوال المثلثية العكسية :

علمنا من قبل أن الصور التكاملية للدوال المثلثية العكسية هى :

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \qquad (|x| < 1)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (|x| < 1)\text{،}$$

$$\frac{d}{x}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad , \quad \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (|x| > 1)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (|x| > 1)$$

ومن ثم نرى أن الصورة التكاملية هى :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c = -\cos^{-1} x + c \qquad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c = -\cot^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c = -\csc^{-1} x + c \quad (|x| > 1)$$

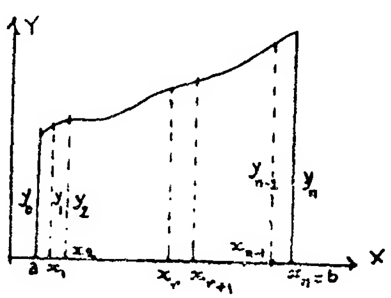
بند ٦ ـ ٧ ـ التكامل المحدود بالتقريب :

قاعدة شبه المنحرف :

يمكن ايجاد قيمة التكامل المحدود بالتقريب بعدة طرق وسندرس الآن أسهلها وهى طريقة شبه المنحرف وتتم هـــذه الطريقة بتقسيم النطاق $[a , b]$ الى « n » من الأقسام المتساوية كل قسم يساوى « Δx »

حيث $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ نفرض أن النقط $x_1 , x_2 , x_3 \ldots\ldots x_{n-1}$

موجودة فى النطاق على ابعاد متساوية من بعضها البعض وكذلك نفرض أن $x_0 = a$, $b = x_n$ انظر شكل ٦ ـ ٧ ـ ١



شكل ٦ ـ ٣ ـ ١

$$\therefore \quad x_0 = a \ , \ x_1 = a + \Delta x \ , \ x_2 = a + 2(\Delta x) \ ,$$

$$x_3 = a + 3\Delta x \ , \ \ldots\ldots\ldots \ , \ b = x_n = a + n(\Delta x)$$

فقيمة التكاملات في هذه الحالة هي عبارة عن مجموع التكاملات في هذه الفترات التي طول كل منها « Δx » اى ان :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

والمساحة المحصورة بين المنحنى ومحور « x » تساوي تقريبا مساحة اشباه المنحرفات

وبما أن مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) $\times$ الارتفاع .
فاذا كانت قيمة التكامل المحدود هي « T » فانه يكون لدينا .

$$\therefore\ T = \tfrac{1}{2}(y_0 + y_1)\,\Delta x + \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)\,\Delta x + \dots + \tfrac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\,\Delta x$$

$$= [\tfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1})]\,(\Delta x)$$

حيث $y_n = f(x_n)\ \dots,\ y_1 = f(x_1)\ ,\ y_0 = f(x_0)$

٦ ـ ٧ ـ ١ أمثلة :

مثال (١) :

أوجد قيمة $\int_1^2 x^2\,dx$ بالتقريب باستخدام طريقة شبه المنحرف وذلك اذا كانت « $n = 4$ » ثم أوجد قيمة التكامل الصحيحة .

الحل :

قيمة التكامل الصحيحة هي :

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^2 = \frac{1}{3}[8-1] = \frac{7}{3} \simeq 2.33333$$

طريقة شبه المنحرف : تقسم المساحة بين $x = 2\ ,\ x = 1$ الى أربعة أقسام متساوية كل منها يساوى « Δx »

حيث أن $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$$\therefore \quad x_0 = a = 1 \quad , \quad y_0 = f(x_0) = 1^2 = \frac{16}{16}$$

$$x_1 = a + \Delta x = 1 + \tfrac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad ,$$

$$y_1 = f(x_1) = (5/4)^2 = \frac{25}{16}$$

$$x_2 = a + 2(\Delta x) = 1 + \tfrac{1}{2} = \frac{6}{4} \quad ,$$

$$y_2 = f(x_2) = (6/4)^2 = \frac{36}{16}$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = 1 + (3/4) = \frac{7}{4} \quad ,$$

$$y_3 = f(x_3) = (7/4)^2 = \frac{49}{16}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 1 + 1 = 2 = b \quad ,$$

$$y_4 = f(x_4) = 2^2 = 4 = \frac{64}{16}$$

$$\therefore \quad T = [\tfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})](\Delta x)$$

$$= [\tfrac{1}{2}(5) + \frac{110}{16}](\tfrac{1}{4})$$

$$= (\frac{5}{2} + \frac{55}{8})\tfrac{1}{4} = \frac{75}{8} \cdot \tfrac{1}{4} = 2.34375$$

مثال (٢) :

اذا كانت $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ أوجد قيمة تقريبية للعدد « π »

باستخدام طريقة شبه المنحرف اذا كانت $n = 10$.

الحـل :

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{10} = 0.1$$

$$\therefore\ x_0 = a = 0 \qquad , y_0 = f(x_0) = 1$$

$$x_1 = a + \Delta x = 0.1 \qquad , y_1 = f(x_1) = 0.9901$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 0.2 \qquad , y_2 = f(x_2) = 0.9615$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = 0.3 \qquad , y_3 = f(x_3) = 0.9174$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 0.4 \qquad , y_4 = f(x_4) = 0.8621$$

$$x_5 = a + 5\Delta x = 0.5 \qquad , y_5 = f(x_5) = 0.8000$$

$$x_6 = a + 6\Delta x = 0.6 \qquad , y_6 = f(x_6) = 0.7353$$

$$x_7 = a + 7\Delta x = 0.7 \qquad , y_7 = f(x_7) = 0.6711$$

$$x_8 = a + 8\Delta x = 0.8 \qquad , y_8 = f(x_8) = 0.6098$$

$$x_9 = a + 9\Delta x = 0.9 \qquad , y_9 = f(x_9) = 0.5525$$

$$x_{10} = a + 10\Delta x = 1.0 \qquad , y_{10} = f(x_{10}) = 0.5000$$

$$\therefore\ T = [\tfrac{1}{2}(y_0 + y_{10}) + (y_1 + y_2 + \dots y_9)]\ (\Delta x)$$

$$= (\frac{1.5}{2} + 7.0998)\ (0.1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \pi \simeq 3.14$$

تمـــارين

اســـــتخدم طريقة شـــــبه المنحرف لايجـــاد قيمة تقريبية للتكامل المحدد لكل من الدوال المعطاه فى الحيز المعطى وبعدد الأقسام المعطاه . ثم قارنها بقيمة التكامل المضبوطة .

1) $f(x) = x \quad , a = 0 , b = 2 , n = 4$

2) $f(x) = x^3 \quad , a = 0 , b = 2 , n = 4$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad , a = 1 , b = 2 , n = 2$

٦ ــ ٨ تمـــارين :

١ ــ حل كل من المعادلات التفاضلية التالية :

1) $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ عنـــدما $x = 0$ فان $y = 1$

2) $\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)$, $y = -3$ عنـــدما $x = 0$ فان

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{(1 + y^2)^3}}{y}$, $y = 1$ عنـــدما $x = 0$ فان

٢ ــ أوجد السرعة والمسافة عند اى زمن « t » لجسم يتحرك بحيث تكون عجلته « B »

أولا : $B = t$ ثانيا : $B = (t^3 + 1)^2$

علما بأن $v = v_0 , s = s_0$ عندما $t = 0$

٣ ــ أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1) $\int (x^2 - 2\sqrt{x})\, dx$ 2) $\int (3x + 5)^{25}\, dx$

3) $\int \sqrt{2 + 3y}\, dy$ 4) $\int \dfrac{dx}{(4x + 8)^2}$

5) $\int \dfrac{3y}{\sqrt{(1 - y^2}}\, dy$ 6) $\int \dfrac{t\, dt}{(2t^2 + 1)^3}$

7) $\int (\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}})^3\, dx$ 8) $\int (2x^2 + 1)^3\, dx$

9) $\int (\sqrt{x} + 5)^5) \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ 10) $\int (2u - 5u^{-1})\, du$

٤ ــ أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1) $\int \sin 2t \cos^2 2t\, dt$ 2) $\int 2 \sin x \cos x\, dx$

3) $\int \sin^2 2t\, dt$ 4) $\int \cos^2 5x\, dx$

5) $\int \sin 3x \cos 3x\, dx$ 6) $\int \sin^3 7x . \cos 7x\, dx$

7) $\int \dfrac{\sin 2t}{\sqrt{2 - \cos 2t}}\, dt$

8) $\int \dfrac{\sin\left(\dfrac{z - 1}{3}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{z - 1}{3}\right)}\, dz$

9) $\int \cos(\dfrac{3}{2} x) \cos \frac{1}{2} x\, dx$

10) $\int \sin 5x \sin 4x \, dx$

11) $\int (1 + \sin 2t)^{3/2} \cos 2t \, dt$

12) $\int \sin t \cos t (\sin t + \cos t) \, dt$

٥ ـ أوجد قيمة التكاملات المحدودة الآتية :

1) $\int_{1}^{2} (2x + 3) \, dx$

2) $\int_{0}^{1} (x^2 + 2x + 3) \, dx$

3) $\int_{-1}^{1} (x + 1)^2 \, dx$

4) $\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$

5) $\int_{0}^{\pi/2} \cos x \, dx$

6) $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} (\cos x / \sin^2 x) \, dx$

7) $\int_{0}^{\pi/6} \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} \, dx$

8) $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x \, dx$

9) $\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

10) $\int_{-2}^{2} (x + x^3 + x^5) \, dx$

11) $\int_{-1}^{1} (x^2 + x^4) \, dx$

12) $\int_{0}^{2} \frac{1}{(x + 1)^3} \, dx$

13) $\int_{0}^{1} e^x \, dx$

14) $\int_{0}^{3} \frac{1}{3 + 4x} \, dx$

15) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{(4 + \cos)} dx$ 16) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(2 + \tan x)} dx$

17) $\int_{0}^{1} e^{x^2} . x\, dx$ 18) $\int_{0}^{\pi/2} e^{\cos x} . \sin x\, dx$

19) $\int_{0}^{\pi/4} e^{(2 + 3 \tan x)} \sec^2 x\, dx$ 20) $\int_{1}^{4} e^{(\sqrt{x} + 1)} . \frac{1}{\sqrt{x}} . dx$

٦ ـ باستخدام النظرية الرئيسية للتكامل أوجـــــد $F'(x)$ لكل من الدوال الآتية :

1) $F(x) = \int_{0}^{\sqrt{x}} \sqrt{1 + t^2}\, dt$

2) $F(x) = \int_{1}^{x^2} \frac{1}{t} dt$

3) $F(x) = \int_{x}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt$

4) $F(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{1 + t^2}$

5) $E(x) = \int_{1}^{2x} \cos t^2 . t \, dt$

6) $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} t^2 e^{-t} \, dt.$

7) $F(x) = \int_{x^2}^{\cos x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$

8) $F(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} t^4 e^{-2t} \, dt$

9) $F(x) = \int_{\arcsin x}^{\arcsin 2x} \text{Sin } u \, dn$

10) $F(x) = \int_{\tan x}^{\tan 2x} (1 + t^2)^2 \, dt$

الباب السابع

تطبيقات على التكامل المحدود

بند ٧ ـ ١ : ايجاد المساحات بالتكامل :

المساحة تحت المنحنى Area under a curve :

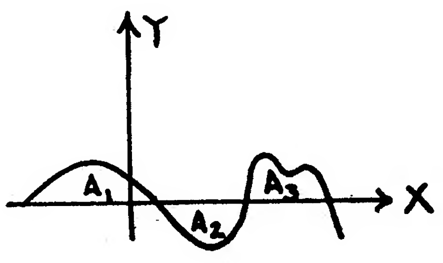
كما سبق وقدمنا آنفا فان التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة بين منحنى الدالة $f(x)$ فى النطاق $[a, b]$ والمحور السينى والمستقيمين $x = a , x = b$ وسنسوق الآن بعض الملاحظات

ملاحظات ٧ ـ ١-١ بالنسبة للمساحات تحت المنحنى .

١ ـ اذا وقع المنحنى أعلى محور « x » فى الحيز (النطـــاق) $[a, b]$ فان قيمة المساحة تكون موجبة

٢ ـ اما اذا كان المنحنى يقع أسفل محور « x » فى الحيز $[a, b]$ فان قيمة التكامل تكون سالبة بينما المساحة عبارة عن القيمة المطلقة لهذا التكامل .

٣ ـ أما اذا كانت بعض أجزاء المنحنى تقع أعلى محور « x » والبعض الآخر تقع أسفل محور « x » فان المساحة فى الحيز (النطاق) كله تساوى مجموع القيم المطلقة للمساحات كما هو واضح فى الشـــكل التالى :



شكل ٧ ـ ١ ـ ١

$$\therefore \quad A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

على انه يجب أن نلاحظ انه اذا اردنا ايجاد قيمة التكامل المحدود للدالة $f(x)$ بالنسبة الى « x » بين $x = a$, $x = b$ ، فان قيمة التكامل عند $x = a$ مطروحة من قيمة التكامل عند $x = b$ بغض النظر عن المنحنى يقع اعلى او اسفل محور « x » هى النتيجة المرجوة أى :

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

٧ – ١ – ٢ امثلة :

مثال (١) :

(i) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y = x - x^3$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

(ii) أوجد التكامل $\int^1 (x - x^3)\, dx$

الحـــل :

نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور « x » وذلك بوضع $y = 0$ فى المعادلة للمنحنى فنجد ان :

$$\therefore x - x^3 = 0 \therefore x(1 - x^2) = 0 \therefore x(1 - x)(1 + x) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = -1$$

فاذا كانت « A_1 » هى المساحة تحت المنحنى فى النطاق $[-1, 0]$

$$\therefore A_1 = \int_{-1}^{0} (x - x^3)\, dx = [\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4)]_{-1}^{0} = 0 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) = -\tfrac{1}{4}$$

واذا كانت : « A_2 » هى المساحة تحت المنحنى فى النطاق $[0, 1]$

$$\therefore A_1 = \int_0^1 (x - x^3)\, dx = [\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$

اذا كانت : « A » هى المساحة تحت المنحنى فى النطاق $[-1, 1,]$

$$\therefore A = |A_1| + |A_2| = |-\tfrac{1}{4}| + |\tfrac{1}{4}| = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

بينما نجد

$$\int_{-1}^{1} (x - x^3)\, dx = [\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4]_{-1}^{1} = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = 0$$

وسنذكر الآن بعض **خواص التكامل المحدود** التى سبق ومر علينا بعضها .

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (a \leqslant c \leq b)$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = - \int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

وذلك اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة فردية

4) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2 \int_0^a f(x)\,dx$

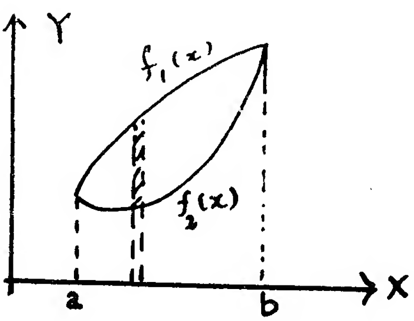
وذلك اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة زوجية .

5) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt$

بند ٧ ــ ٢ المساحة بين منحنيين :

اذا فرضنا أن $f_1(x)$, $f_2(x)$ دالتان للمتغير « x » وكانتا متصلتين فى النطاق $[a, b]$ وكانت $f_2(x) \leq f_1(x)$ لجميع قيم « x » حيث $a \leqslant x \leq b$ فان المساحة بين المنحنيين هى عبارة عن التكامل المحدود .

$$\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

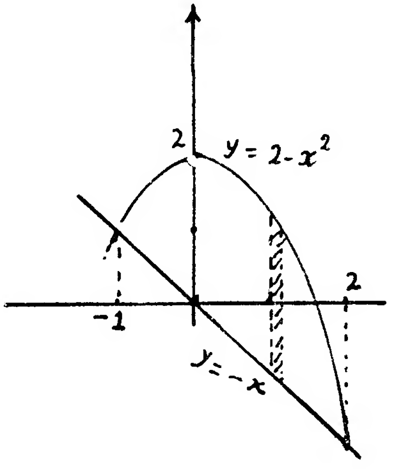


شكل ١ ــ ٢ ــ ١

ويمكن اعتبارها عبارة عن المساحة تحت منحنى الدالة $f_1(x)$ فى $[a, b]$ مطروحا منها المساحة تحت منحنى الدالة $f_2(x)$ فى نفس النطاق $[a, b]$ أو بمعنى آخر هى مجموع عناصر المساحة المحصورة بين المنحنيين كما هو معروف من التعريف الريماني للتكامل . وسنسوق الآن بعض الأمثلة :

٧ ـ ٢ ـ ١ أمثلة :

مثال (١) :



شكل ٧ ـ ٢ ـ ٢

اوجد المساحة بين المنحنى $y = 2 - x^2$ والخط المستقيم $y = -x$

الحل :

أولا ـ نوجد نقط تقاطع المنحنى مع الخط المستقيم

$$\therefore \quad 2 - x^2 = -x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\therefore \quad (x - 2)\ (x + 1) = 0$$

$$\therefore \quad x = -1 \quad , \quad x = 2$$

اذا حدود التكامل هى $x = -1$, $x = 2$. لاحظ من الشكل أن الدالة $f_2(x) = -x$ اصغر من الدالة $f_1(x) = 2 - x^2$ فى النطاق $[-1, 2]$

$$\therefore \quad A = {}_{-1}\int^{2} [f_1(x) - f_2(x)]\ dx = {}_{-1}\int^{2} (2 - x^2 + x)\ dx$$

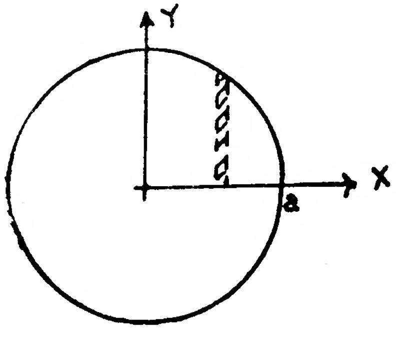
$$= [2x - 1/3\ x^3 + \tfrac{1}{2}\ x^2]_{-1}^{2} =$$

$$[\ (4 - (8/3) + 2) - (-2 + 1/3 + \tfrac{1}{2})\ ] = \tfrac{1}{2}\ .$$

مثال (٢) :

اوجد المساحة المحصورة داخل الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$

الحل :



شكل ٧ ـ ٢ ـ ٢

$$A = 2\ {}_{-a}\int^{a}\ y\ dx$$

$$= 2\ {}_{-a}\int^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

$$= 4\ {}_{0}\int^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

نضع $x = a \sin\theta$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos\theta\ ,$$

$$dx = a \cos\theta\ d\theta$$

عندما $x = 0$ فان $a \sin\theta = 0$ أى أن $\sin\theta = 0$ ومنه $\theta = 0$

عندما $x = a$ فان $a \sin\theta = a$ أى أن $\sin\theta = 1$ ومنه $\theta = \pi/2$

$$\therefore \quad A = 4 \int_0^{\pi/2} a \cos\theta \, . \, a \cos\theta \, d\theta = 4 a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 2 a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= 2 a^2 \left[\theta + \tfrac{1}{2} \sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2 a^2 (\pi/2 + 0) = \pi a^2$$

مثال (٣) :

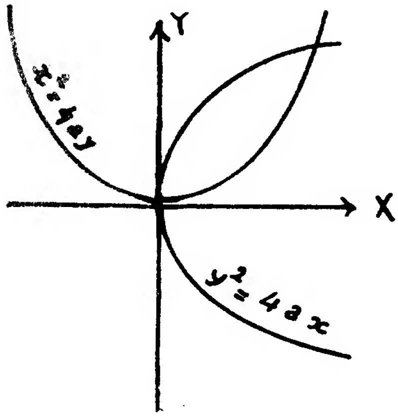
أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $x^2 = 4ay, \ y^2 = 4ax$ حيث $a > 0$

الحل :

لايجاد نقط تقاطع المنحنيين تتبع الخطوات التالية :

$$y^2 = 4ax \qquad (1)$$

$$x^2 = 4ay \qquad (2)$$



شكل ٧ ــ ٢ ــ ٤

$$y = \frac{x^2}{4a} \quad , \quad y^2 = \frac{x^4}{16 a^2}$$

وبالتعويض فى المعادلة (١) نجد أن

$$\frac{x^4}{16 a^2} = 4ax \qquad \therefore \quad x^4 = 64 a^3 x$$

$$\therefore \quad x^4 - 64 a^3 x = 0 \qquad \therefore \quad x (x^3 - 64 a^3) = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \, , \, x = 4a$$

تعتبر $y_1 = 2\sqrt{a\,x}$, $y_2 = \dfrac{x^2}{4\,a}$ لأن $y_2 > y_1$ فى هذا النطاق

$$\therefore\ A = \int_0^{4a} (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^{4a} \left(\sqrt{4\,a}\ \sqrt{x} - \frac{x^2}{4\,a}\right) dx$$

$$= \left[\sqrt{4\,a}\,.\,\frac{2}{3}\,(x)^{3/2} - \frac{1}{4\,a}\,.\,\frac{(x)^3}{3}\right]_0^{4a} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{4\,a}\,.\,(4\,a)^{3/2} - \frac{1}{4a}\,\frac{(4\,a)^3}{3} - 0$$

$$= \frac{2}{3}\,.\,16\,a^2 - \frac{1}{3}\,.\,16\,a^2 = \frac{16}{3}\,a^2$$

بند ٧ ـ ٣ ـ استخدام التكامل فى علم الديناميكا :

اولا ـ المسافة التى يقطعها جسيم يسير بسرعة معينة :

اذا تحرك جسيم بسرعة $V\,(t)$ حيث « V » دالة للمتغير « t » (الزمن) فان المسافة التى يقطعها الجسيم فى الفترة الزمنية $[a, b]$ هى :

$$S = \int_{t=a}^{t=b} V\,(t)\ dt.$$

٧ ـ ٣ ـ ١ امثلة :

مثال (١) :

أوجد المسافة التى يقطعها جسيم يتحرك بسرعة $V = 2t + 1$ بين $t = 2$, $t = 0$

الحـل :

المسافة المطلوبة هى عبارة عن نتيجة التكامل المحدود التالى :

$$S = \int_0^2 V(t)\,dt = \int_0^2 (2t+1)\,dt = [t^2 + t]_0^2$$

$$= [2^2 + 2 - 0] = 6.\ \text{units}$$

مثال (٢) :

أوجد المسافة التى يقطعها جسيم يتحرك بسرعة $V(t) = \sin t + \cos t$ فى الفترة الزمنية $[0, \pi]$

الحـل :

المسافة المعنية هى نتيجة التكامل الآتى :

$$S = \int_0^{\pi} V(t)\,dt = \int_0^{\pi} (\sin t + \cos t)\,dt$$

$$= [-\cos t + \sin t]_0^{\pi} = [-(-1) + 0 - (-1 + 0)]$$

$$= 2.\ \text{units}$$

ثانيا ـ السرعة التى يسير بها جسيم :

اذا تحرك جسيم بعجلة معينة $g(t)$ حيث « g » دالة للمتغير « t » (الزمن) فان سرعة الجسيم فى نهاية الفترة الزمنية $[a, b]$ يعطى من التكامل المحدود

$$V = \int_{t=a}^{b} g(t)\,dt.$$

مثـال :

أوجـد السرعة التى يتحرك بهـا جسـيم معين عنـدما يكون $g = 32t + 15t^2$ عند نهاية الفترة الزمنية $1 \leq t \leqslant 2.$

الحـل :

السرعة عند نهاية الفترة الزمنية $[1, 2]$ تعطى من التكامل

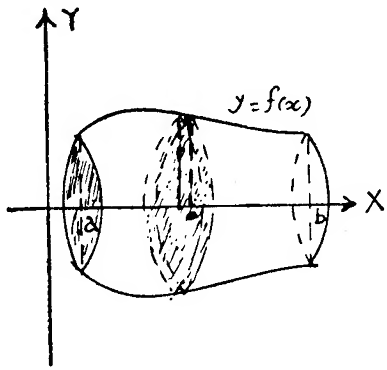
$$V = \int_1^2 (32t + 15t^2)\,dt = [16t^2 + 5t^3]_1^2$$

$$= [16(2)^2 + 5(2)^3 - \{16(1)^2 + 5(1)^3\}]$$

$$= [64 + 40 - (16 + 5)] = 83\ \text{units}.$$

بند ٧ ـ ٤ ـ الحجم الدوراني Volume of Revolution :

الحجم الدورانى هو الحجم الناتج من دوران مســـاحة محدودة بمنحنى حول خط مستقيم .



شكل ٧ ـ ٤ ـ ١

فاذا دارت المساحة حول محور « X » فان الحجم للجسم الناتج يسمى بالحجم الدورانى حول محور « X » كما هو موضح فى الشكل المقابل . فاذا كانت المســـاحة المحصورة بين x , $x + \Delta x$ هى عنصر المساحة $y \Delta x$. فعند دوران هذا العنصر حـــول محـــور « x » فانه يصنع حجما مقداره $\pi y^2 \Delta x$ فاذا جمعنا هذه العناصر واخــذنا النهاية عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ فان الحجم الدورانى الناتج « V » هو :

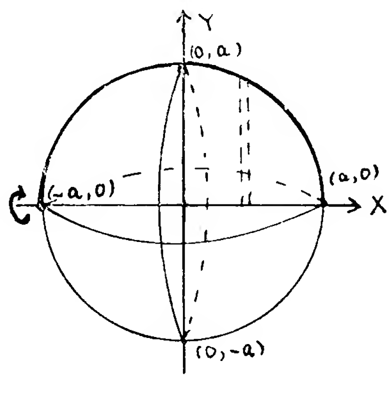
$$V = \int_{x=a}^{b} \pi y^2 (x) \, dx$$

مثال (١) :

أوجد الحجم الدورانى الناتج من دوران نصف الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ حول محور « x. »

الحــل :

يقطع محيط الدائرة محـــور « x » عندما $x = a , x = -a$ كما هو واضح من الشـــكل المقابل الحجـــم الدورانى هو ناتج التكامل



شكل ٧ ـ ٤ ـ ٢

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2 \, dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \pi (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{4 \pi}{3} a^3.$$

وهو حجم الكرة التى نصف قطرها « a » .

مثال (٢) :

أوجد حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

اولا ــ حول المحور السينى (X)

ثانيا ــ حول المحور الصادى (Y)

الحــل :

اولا ــ الدوران حــول محور X المعادلة يمكن كتابتهــا فى الصورة

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

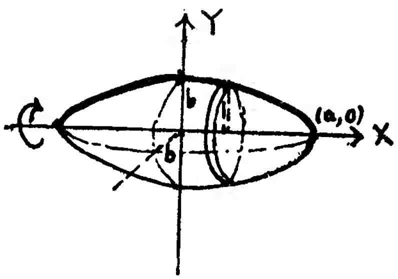
ويكون الحجم فى هــذه الحالة هو

$$V_x = \int_{-a}^{a} \pi\, y^2\, dx$$

$$= \int_{0}^{a} 2\pi\, (b^2)\, \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

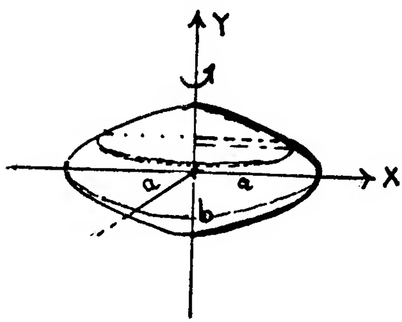
$$= 2\pi b^2 \left[x - \frac{1}{3a^2} x^3\right]_0^a$$

$$= \frac{4\pi}{3} b^2\, a.$$



شكل ٧ ــ ٤ ــ ٣
الدوران حول محور x.

ثانيا ــ الدوران حــول محور « Y » فى هذه الحالة تتغير صورة التكامل لأن العنصر المساحى فى هذه الحــالة « x d y » وعند دورانه حول محور « Y » فانه يكون قرصا حجمه $\pi x^2 dy$ وعند التجميع وجمل النهاية عندما $\Delta y \longrightarrow 0$ فاننا نحصل على التكامل



شكل ٧ ــ ٤ ــ ٤
الدوران حول محور

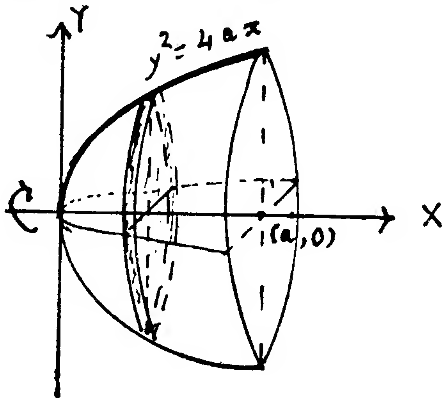
$$V_y = \int_{y=-b}^{b} \pi x^2\, dy = \int_{-b}^{b} \pi a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2\pi a^2 \left[y - \frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b$$

$$= \frac{4\pi}{3} a^2 b.$$

مثال (٣) :

أوجد حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران القطع المكافىء الذى معادلته $y^2 = 4ax$ بين رأسه $x = 0$ وبؤرته $x = a$ بحيث يكون الدوران حول محور « x »



شكل ٧ – ٤ – ٥

الحــل :

كما سبق فان الحجم فى هذه الحالة يعطى من

$$V = \int_0^a \pi y^2\, dx$$

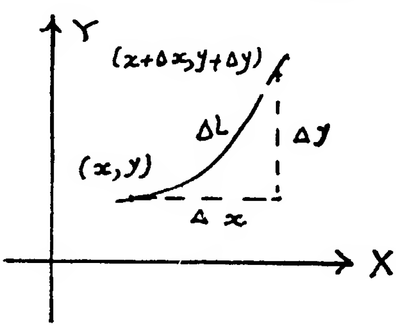
$$= \int_0^a \pi (4ax)\, dx$$

$$= 4\pi a \left[x^2/2\right]_0^a$$

$$= 2\pi a^3.$$

بند ٧ – ٥ طول منحنى Length of a Curve :

اذا كانت الدالة $y = f(x)$ دالة متصـــلة فى الحيز $[a, b]$ وكانت قابلة للتفاضل فى داخل هذا النطاق فان طول القوس للمنحنى بين a , b هــو L_a^b يعـــرف بالتكامل المحدود



شكل ٧ – ٥ – ١

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ويمكن استنتاج هذا القانون كما يلى :

باخذ النقطتين (x, y) , $(x + \Delta x, y + y)$ قريبتين قربا كافيا فاننا يمكننا كتابة « ΔL » فى الصورة التقريبية التالية :

$$(\Delta L)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

وبالقسمة على $(\Delta x)^2$ ثم يأخذ النهايات عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ فاننا نحصل على التالى بعد اخذ الجذر التربيعى

$$\therefore \frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

او يمكن وضعها فى الصورة التكاملية المقابلة

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

او يمكن الحصول على هذه النتيجة وذلك باستخدام التعريف الريمانى للتكامل

$$L_a^b = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta L_s \to 0}} \sum_{s=1}^{n} \Delta L_s$$

$$= \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

ومن ذلك نحصل على نفس التعريف للتكامل .

اما اذا كانت معادلة المنحنى معطاه فى صورة معادلات بارامترية اى ان x , y عبارة عن دوال للمتغير البارامترى « t » بمعنى $x = f(t)$, $y = g(t)$ فان طول القوس يعطى من :

$$L_a^b = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

٧ ـ ٥ ـ ١ امثلة :

مثال (١) :

أوجد طول قوس الدائرة التى معادلتها $x = a\cos\phi \;,\; y = a\sin\phi$.

الحـل :

$$\because\; x = a\cos\phi \qquad \therefore\; \frac{dx}{d\phi} = -a\sin\phi$$

$$\because\; y = a\sin\phi \qquad \therefore\; \frac{dy}{d\phi} = a\cos\phi$$

$$\therefore\; \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} = \sqrt{a^2\sin^2\phi + a^2\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^2} \,.\, = a$$

$$\therefore\; L = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2}\, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} a\, d\phi = a\,[\phi]_0^{2\pi} = 2\pi a$$

وهو طول محيط الدائرة التى نصف قطرها « a »

مثال (٢) :

أوجد طول قوس المنحنى الذى معادلته $y = \frac{2}{3} x^{3/2}$

بين $(x = 0)$, $(x = 3)$

الحـل :

$$\therefore\; y = \frac{2}{3} x^{3/2} \;\therefore\; \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}$$

$$\therefore \left(\frac{dL}{dx}\right)^2 = 1 + (x^{\frac{1}{2}})^2 = 1 + x$$

$$\therefore L = {}_0\int^3 \sqrt{1 + x}\, dx = \frac{2}{3} \left[(1 + x)^{3/2} \right]_0^3$$

$$= \frac{2}{3} \left[(1 + 3)^{3/2} - 1 \right]$$

$$= \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3} \text{ units.}$$

مثال (٣) :

أوجد طول القوس للمنحنى الذى معادلته $y = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2}$

بين $x = 3 , x = 0$.

الحـل :

$$\therefore y = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{3/2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dy} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x^2 + 2} \cdot 2x = x \sqrt{x^2 + 2} .$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + x^2 (x^2 + 2) = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$= (x^2 + 1)^2$$

$$\therefore \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{(x^2 + 1)^2} = (x^2 + 1)$$

$$\therefore\ L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = {}_0\!\int^3 (x^2 + 1)\, dx$$

$$= [x^3/3 + x]_0^3 = [\,(9 + 3) - 0] = 12.$$

مثال (٤) :

أوجد المسافة التى يقطعها جسيم اذا كان موضعه هو النقطة P (x, y) عند الزمن « t » يعطى من :

$$x = a \cos t + a t \sin t\ ,\ y = a \sin t - a t \cos t\ .$$

فى الفترة الزمنية $[0\ ,\ \frac{\pi}{2}]$.

الحل :

$$\because\ x = a \cos t + a t \sin t$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt} = -\ a \sin t + a\ (t \cos t + \sin t) = at \cos t.$$

$$\because\ y = a \sin t - at \cos t$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dt} = a \cos t - a\ (\cos t - t \sin t) = a\ t \sin t$$

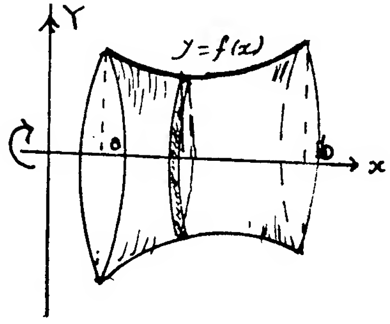
$$\therefore\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2\ t^2 \cos^2 t + a^2\ t^2 \sin^2 t = a^2\ t^2.$$

$$\therefore\ L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = \int_0^{\pi/2} at\ dt$$

$$= \frac{a}{2}\ [\,t^2\,]_0 = \frac{a\ \pi^2}{8}.$$

بند ٧ ـ ٦ السطح الدورانى : Surface of Revolution.

السطح الدورانى هو السطح الناتج من دوران منحنى معين حول خط مستقيم . فاذا دار جزء من قوس طوله « ΔL » حــول محور « X » فانه يرسم شريطا دائريا نصف قطره « y » وعرضه « ΔL » والمســـاحة التى يشـــغلها هى $\Delta S = 2 \pi y \Delta L$ ويأخـــذ النهـــايات عنـــدما تؤول « Δx » الى الصفر نجد أن :



شكل ٧ ـ ٦ ـ ١

$$\frac{dS}{dx} = 2 \pi \frac{dL}{dx} = 2 \pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

التى يمكن وضعها فى الصورة التكاملية

$$S = \int_{x=a}^{b} 2 \pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

والصورة الأخيرة تستخدم اذا كانت معادلة الدالة هى $y = y(x)$ أما اذا كانت معادلة الدالة فى الصورة البارامترية $x = x(t)$, $y = y(t)$ حيث « t » هى عبارة عن البارامتر فان مساحة السطح الدورانى هى :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} 2 \pi y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

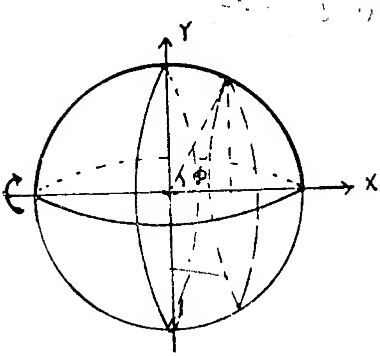
أما اذا دار المنحنى حول محور « Y » فان المســـــاحة الدورانية « S » فى هذه الحالة هى :

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2 \pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

امثلة ٧ ـ ٦ ـ ١ :

مثال (١) :

أوجد المساحة الدورانية الناتجة من دوران الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ حول محور « x »



شكل ٧ ـ ٦ ـ ٢

الحل :

يمكن كتابة معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ فى صورتها البارامترية اى

$$x = a \cos \phi , \; y = a \sin \phi$$

$$\therefore \frac{dx}{d\phi} = - a \sin \phi ,$$

$$\therefore \frac{dy}{d\phi} = a \cos \phi \qquad \therefore \left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 = a^2$$

وبذلك تكون المساحة الدورانية « S » حول « X » هى :

$$S = \int_0^{\pi} 2 \pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} \, d\phi$$

$$= 2 \pi \int_0^{\pi} a \sin \phi \; a \; d\phi$$

$$= 2 \pi a^2 \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi = \pi a^2 \left[- \cos \phi\right]_0^{\pi} = 4 \pi a^2$$

وهى مساحة الكرة التى نصف قطرها « a » كما هو واضح من الشكل ٧ ـ ٦ ـ ٢ .

مثال (٢) :

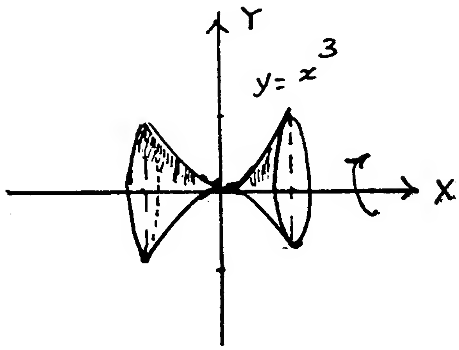
أوجد المساحة الدورانية الناتجة من دوران قوس المنحنى $y = x^3$ بين $x = 0 , x = 1$ حول محور « x »

الحـل :

$$\because \; y = x^3 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + 9x^4}$$

ومن ثم تكون المساحة الدورانية :



شكل ٧ – ٦ – ٣

$$S = \int 2\pi \, y \, dL$$

$$= \int_0^1 2\pi x^3 (1 + 9x^4)^{1/2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1 + 9x^4)^{1/2} \times \tfrac{1}{4} \, dx^4$$

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} \left[(1 + 9x^4)^{3/2} \right]_0^1$$

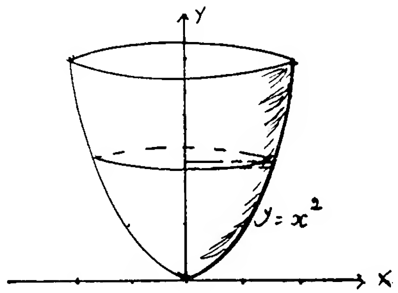
$$= \frac{\pi}{27} \left[(10)^{3/2} - 1 \right]$$

$$= \frac{\pi}{27} \left\{ 10\sqrt{10} - 1 \right\}$$

مثال (٣) :

أوجد المساحة الدورانية الناتجة من دوران قوس المنحنى الذى معادلته $y = x^2$ حول محور « Y » بين النقطتين $(2, 4)$, $(0, 0)$.

الحــل :



شكل ٧ – ٦ – ٤

$$\therefore \quad y = x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\therefore \quad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

وبذلك تكون مســـاحة الدورانى « S » حــول محور « Y » بين $x = 0$, $x = 2$ هى :

$$S = {}_0\int^2 2\pi x\, dL \quad = {}_0\int^2 2\pi x \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$= {}_0\int^2 \frac{2\pi}{2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx^2$$

$$= \pi\, {}_0\int^2 (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx^2$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{4} \left[(1 + 4x^2)^{3/2} \right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{6} \left\{ (17)^{3/2} - 1 \right\}$$

$$= \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)$$

حل آخر : نجرى التكامل بالنسبة الى « y »

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, . \, dy$$

$\therefore \; y = x^2 \qquad \therefore \; x = \sqrt{y}$

$\therefore \; \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \therefore \; dL = \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} \, dy$

$$\therefore \; S = 2\pi \, . \int x \, dL$$

$$= 2\pi \int \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} \, dy$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{y + \tfrac{1}{4}} \, dy$$

$$= 2\pi \, . \frac{2}{3} \left[(\tfrac{1}{4} + y)^{3/2} \right]_0^4$$

$$= \frac{4\pi}{3} \, . \frac{1}{8} \left[(1 + 4y)^{3/2} \right]_0^4$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[(17)^{3/2} - 1 \right] \qquad = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)$$

مثال (٤) :

أوجد المساحة الدورانية الناتجة من تحرك نقطة $P(x, y)$ على منحنى

بحيث $x = (t + 1)$, $y = \frac{t^2}{2} + t$ حول محور Y بين

$t = 4$, $t = 0$

الحـل :

$\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = t + 1 \quad \therefore \; dL = \sqrt{1 + (1 + t)^2} \, dt.$

$$\therefore \; S = \int 2\pi \,.\, x \, dL$$

$$= \int_0^4 2\pi (t+1)\sqrt{1+(t+1)^2}\, dt$$

$$= \int_0^4 \pi\sqrt{1+(t+1)^2}\; d\,(t+1)^2$$

$$= \pi \,.\, \frac{2}{3} \left[(1+(t+1)^2)^{3/2} \right]_0^4$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left((26)^{3/2} - 2^{3/2} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(26\,(26)^{\frac{1}{2}} - 2\,(2)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} \left(13\sqrt{13} - 1 \right)$$

تمـــارين

١ ـ اوجد المساحة بين المنحنى $y = 4 - x^2$ والخط المستقيم $y = -3x$.

٢ ـ أوجد النهايات العظمى والصغرى للمنحنى $y = x^3 - 3x^2$ واوجد المساحة تحت المنحنى (المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات) ارسم هذا المنحنى .

٣ ـ أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 + 2x + 3 \quad , y = 2x^2$.

٤ ـ أوجد المساحة بين المنحنى $y = 2x^2$ والخط المستقيم $x = 0$ وكذلك الخط المستقيم $y = B$.

٥ ـ أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y = a^2 + x^2$ والمستقيمات $x = a \quad , x = 0 , y = 0$.

٦ ـ أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 2 - x^2$ والمنحنى $y = x^2 - 6$.

٧ ـ ارسم وأوجد المساحات المحصورة بين المنحنيات المعطاة بالمعادلات المبينة :

1) $y = \frac{1}{x^2} , y = -x^2 , x = 1 , x = 2$

2) $y = \sqrt{x} , y = -x , x = 1 , x = 4$

3) $y^2 = x, \quad x - y = 4, \quad y = -1, \quad y = 2$

4) $y = 4 - x^2 , y = -4$

5) $y = x^3 , y = x^2$

6) $x + y = 3 , y + x^2 = 9$

7) $x = y^2 , x - y - 2 = 0$

8) $x - y + 1 = 0 , 7x - y - 17 = , 2x + y + 2 = 0$

٨ ــ أوجد المساحة المحصورة بالمنحنى $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

حيث $(b < a)$

ومن ثم أوجد قيمة المساحة عندما $b = a$,

٩ ــ اذا كانت السرعة لجسم ما هي « V » (قدم / الثانية) دالة للزمن « t » (بالثانية) الممثلة بالعلاقة $V = 3 t^2 - 15 t + 18$.

أوجد الفترة الزمنية التى تكون فيها السرعة موجبة حيث $0 \leq t \leqslant 3$

وأوجد كذلك الفترة الزمنية التى تكون فيها السرعة سالبة . ثم أوجد المسافة الكلية التى قطعها الجسم فى الزمن من $t = 0$ الى $t = 3$.

١٠ ــ اذا كانت المساحة « A » دالة المتغير « x » ومعادلتها هى :

$A = (1 + 3 x)^{\frac{1}{2}} - 1$ حيث $x \geqslant 0$ أوجد

١ ــ متوسط التغير فى المساحة « A » بالنسبة الى « x » بين $x = 8 , x = 1$.

٢ ــ معدل التغير اللحظى للمساحة « A » بالنسبة للمتغير « x » عندما $x = 5$.

٣ ــ الارتفاع « y » للمنحنى كدالة المتغير « x » .

٤ ــ القيمة المتوسطة للارتفاع « y » بالنسبة الى « x » بين $x = 2 , x = 1$.

١١ ــ أوجد الحجم الدورانى الناتج من دوران المساحة بين المنحنيات والخطوط المستقيمة حول الخطوط المستقيمة المعطاة (ارسم المساحة أولا) :

(i) $y = x^2 , y = 0 , x = 3$ حول محور السينات

(ii) $y = 0 , x = 1 , x = 3 , y = 1/x$ حول محور السينات

(iii) $y = 3 , y = 1 , x = 0 , y = 1/x$ حول محور الصادات

(iv) $2 y = x , y^2 = x$ حول محور الصادات

(v) $x = 2 , y = x + 1 , x + y = 1$ حول محور الصادات

(vi) $y = x^2 , y = 0 , x = 3$

حول الخط المستقيم $x = -3$.

(vii) $y = x^2 , y = 0 , x = y , x = 5$ حول محور الصادات

أولا ـ كامل بالنسبة الى « x » .

ثانيا ـ كامل بالنسبة الى « y » .

١٢ ـ ارسم المساحة المحصـــــــورة بين المنحنى $y^2 = 4x$ والخط المستقيم $y = x$ واذا دارت حول محور السينات فأوجد الحجم الدورانى الناتج .

١٣ ـ اوجد الحجم الدورانى الناتج من دوران المساحة بين المنحنى $y^2 = 4ax$ والخط المستقيم $y = 2a$ ومحور السينات .

(أ) حول محور السينات . (ب) حول محور الصادات .

(جـ) حول الخط المستقيم $x = a$.

(د) حول الخط المستقيم $y = 2a$.

١٤ ـ أوجد احجام الأجسام الآتية باستخدام التكامل :

(أ) مخروط دائرى قائم ارتفاعه « h » ونصف قطر قاعدته « a »

(ب) مخروط دائرى قائم ناقص ارتفاعه « h » ونصفا قطرى قاعدتيه a , b

١٥ ـ أوجد الحجم الدورانى الناتج من دوران المنحنى $y = \sin x$ بين $x = 0 , x = \pi$. حول محور « x »

١٦ ـ أوجد أطوال المنحنيات الآتية :

(i) $y = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}$ بين $x = 0 , x = 8$.

(ii) $8 x^2 = 27 y^3$, بين $x = 1 , x = 8$.

(iii) $y = 6 x^{2/3} + 1$ بين $x = -1 , x = -8$

(iv) $x^{2/3} + y^{2/3} + 1$

(v) $y = (3 x^8 + 5)/30 x^3$ بين $x = 1 , x = 2$

(vi) $x = \frac{3}{5} y^{5/3} - \frac{3}{4} y^{1/3}$ بين $y = 1 , y = 0$

(vii) $y = a \cos^3 \theta , x = a \sin^3 \theta$ بين $\theta = \frac{\pi}{2} , \theta = 0$.

١٧ ــ أوجد مساحة السطح الدورانى الناتج من دوران المنحنى الأول حول محور « y » .

١٨ ــ أوجد القيمة المتوسطة للمتغير « y » بالنسبة الى « x » للمنحنى $y = \sqrt{a x}$ بين $x = 4 a , x = a$.

وما هى القيمة المتوسطة للتكامل بين هاتين النقطتين .

١٩ ــ تعريف مركز الكتلة :

مركز الكتلة لصفيحة مستوية منتظمة محدودة بالمنحنى $y = f (x)$ والمحور السيني والمستقيمين $x = a , x = b$ يعرف كالتالى :

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f (x) dx}{\int_a^b f (x) dx} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2 (x) dx}{\int_a^b f (x) dx}$$

من التعريف السابق اوجد مراكز الكتل للصفائح المحصورة بالمنحنيات الآتية :

(i) $y = x^2 , y^2 = 8 x$.

(ii) $4 y = x^2$ $x = 0 , y = 4$ $(. x , y > 0)$

(iii) $x = 1 , y = x^2$.

(iv) $y = a \sin^3 \phi$, $x a \cos^3 \phi$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

٢٠ ــ أوجد مركز الكتلة الدورانية الناتجة من دوران جزء المنحنى المعطى فى التمرين الأخير حول محور « Y »

الباب الثامن

الدوال الزائدية

HYPERBOLIC FUNCTIONS

سنناقش فى هذا الباب نوعا من الدوال المسترسلة Transcedental Functions وهو مايسمى بالدوال الزائدية وهذه الدوال كما سنرى من تعريفها فيما يلى مرتبطة ارتباطا وثيقا بالدالةالأسية e^x . ولهذه المجموعة من الدوال تطبيقات واسعة فى حلول المعادلات التفاضلية ومن ثم فى مجال الرياضيات التطبيقية والهندسة والفيزياء . ولتشابه هذا النوع من الدوال مع الدوال المثلثية ، فلذا اتخذت اسماء مشابهة ولنتعرض للمسميات ثم نتعرض لتعريفها بعد ذلك .

الجيب الزائدى	Hyperbolic sine ويرمز له بالرمز	sinh
جيب التمام الزائدى	Hyperbolic cosine ويرمز له بالرمز	cosh
الظل الزائدى	Hyperbolic tangent ويرمز له بالرمز	tanh
القاطع الزائدى	Hyperbolic secant ويرمز له بالرمز	sech
قاطع التمام الزائدى	Hyperbolic cosecant ويرمز له بالرمز	cosech
ظل التمام الزائدى	Hyperbolic cotangent ويرمز له بالرمز	coth

بند ٨ ــ ١ الدوال الزائدة وخواصها الجبرية :

٨ ــ ١ ــ ١ : تعريف الجيب الزائدى Hyperbolic sine :

تعرف دالة الجيب الزائدى لقيم « x » فى النطاق $(-\infty, \infty)$ بالدالة الآتية :

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

ومن الملاحظ أن هذه الدالة $\leftarrow \infty$ عندما $x \rightarrow \infty$ وكذلك تؤول هذه الدالة الى $(-\infty)$ عندما $x \rightarrow -\infty$. وعند رسم هذه الدالة نجد انها تمثل بالرسم فى شكل (٨ ــ ١ ــ ١) . ومن الملاحظ الآتى :

٨ ـ ١ ـ ٢ ملاحظات :

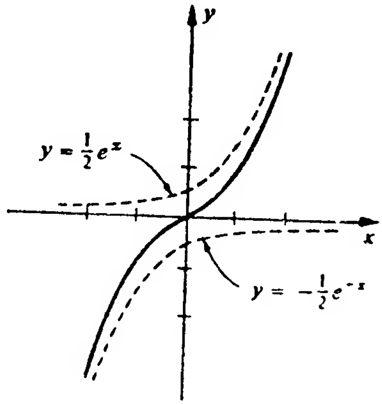
(أ) $\sinh 0 = 0$

وهذا واضح من التعريف

(ب) $\sinh x > 0$ for $x > 0$

$\sinh x < 0$ for $x < 0$

وهذه المتباينة تنتج من حقيقة ان الدالة e^x دالة تزايدية موجبة ومن أن $e^0 = 1$



$y = \sinh x$

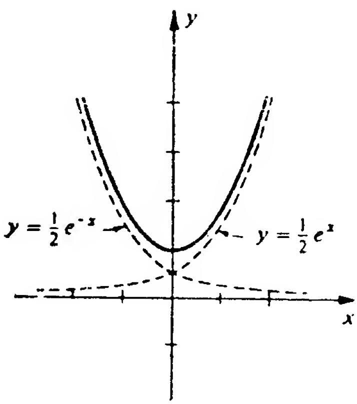
شكل ٨ ـ ١ ـ ١

(جـ) $\sinh(-x) = -\sinh x$

أى الدالة فردية وذلك لما يلى :

$$\sinh(-x) = \frac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2}$$

$$= -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = -\sinh x$$



$y = \cosh x$

شكل ٨ ـ ١ ـ ٢

٨ ـ ١ ـ ٣ تعريف : جيب التمام الزائدى :

تعرف دالة جيب التمام الزائدى كالتالى لجميع قيم « x » فى النطاق $(-\infty, \infty)$

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

ومن الملاحظ ان هذه الدالة تؤول الى (∞) سواء آلت « x » الى ($-\infty$) أو الى (∞) وعند رسم منحنى هذه الدالة نجد انها تمثل بالشكل (٨ ـ ١ ـ ٢) .

٨ ـ ١ ـ ٤ ملاحظات :

(أ) $\cosh 0 = 1$

(ب) لجميع قيم « x » فان : $\cosh x \geqslant 1$

ولاثبات ذلك فان :

$$\cosh x - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}$$

ولكن البسط فى هذا المقدار الأخير ان هو الا عبـــارة عن المقدار $(e^{x/2} - e^{-x/2})^2$.

اى أن : $\cosh x - 1 = \frac{1}{2}(e^{x/2} - e^{-x/2})^2 \geqslant 0$

ومن ثم تنتج المتباينة $\cosh x \geqslant 1 \quad \text{for all } (x)$

(جـ) الدالة cos h x دالة زوجية وذلك لأن :

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{(-x)} + e^{-(-x)}) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

٨ ـ ١ ـ ٥ خواص جبرية لجيب وجيب التمام الزائديين :

(أ) من التعريف نلاحظ أن $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$

وذلك من التعويض المباشر بينما $e^x = \cosh x + \sinh x$

(ب) من التعويض نجد أن $\cosh x , \sinh x$ تحققان المتطابقة الآتية :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

البرهان :

بالتعويض فى الجهة اليسرى من العلاقة نجد أن :

$$\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{4}(2 + 2) = 1$$

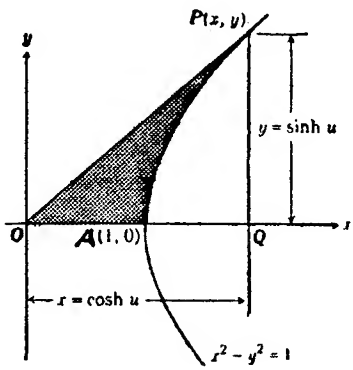
وهذا يثبت المتطابقة .

طريقة اخرى للاثبات :

باستخدام الخاصية (أ) وملاحظة أن :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x - \sinh x)\,(\cosh x + \sinh x)$$
$$= e^{-x} \cdot e^{x} = 1$$

قارن هذه المتطابقة مع متطابقة العلاقات المثلثية $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ولاحظ الاختلاف فى الاشارة .



شكل ٨ — ١ — ٣

(جـ) اى نقطة احداثياتها فى الصورة (cosh u, sinh u) تقع على مايعرف بالقطع الزائد القائم (الفرع الأيمن من هذا القطع) وهو المرسوم فى الشكل (٨ — ١ — ٣) وباستخدام المتطابقة السابقة نرى أن المحل الهندسى لهذه النقطة هو :

$$x^2 - y^2 = 1$$

(د) لقيم « x » الكبيرة الموجبة نجد ان cosh x, sinh x تتصرفان مثل $\frac{1}{2} e^{x}$ ولقيم « x » السالبة وليكن $|x|$ مقدارا كبيرا نجد أن cosh x, — sinh x تتصرفان مثل $\frac{1}{2} e^{-x}$

(هـ) يمكن اثبات المتطابقات الجبرية الآتية :

1) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

2) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

ولاثبات ذلك

الطرف الأيسر فى المتطابقة الأولى هو :

$$\tfrac{1}{2}\,[\,e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}\,]$$

والطرف الأيمن عبارة عن :

$$\tfrac{1}{4}\,\{\,[e^{x} - e^{-x}]\,[e^{y} + e^{-y}] + [e^{x} + e^{-x}]\,[e^{y} - e^{-y}]\,\}$$

$$= \tfrac{1}{4}\,\{\,e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{x-y}$$
$$+ [e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}]\,\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}\,] =$$ الطرف الأيسر

وبنفس الطريقة يمكن اثبات المتطابقة الثانية

ينتج من هاتين المتطابقتين المتطابقات الآتية :

3) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

4) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

وباستخدام المتطابقة فى (ب) نجد ان المتطابقة (4) يمكن وضعها فى احدى الصورتين :

5) $\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1$

6) $\cosh 2x = 1 + 2 \sinh^2 x$

لاحظ الاختلافات بين هذه المتطابقات والمتطابقات المثلثية .

٨ ـ ١ ـ ٦ امثلة :

مثال (١) :

اذا كان $\sinh x = -3/4$ فاحسب $\cosh 2x, \cosh x$

الحـل :

من المتطابقة $\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$ نجد ان :

$$\cosh^2 x = 1 + (-\tfrac{3}{4})^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \qquad \therefore \cosh x = \frac{5}{4}$$

نلاحظ ان : $\cosh x$ دائما موجبة ولنترك كتمرين حساب $\cosh 2x$

مثال (٢) :

اذا كانت $\cosh x = \frac{17}{15}$ فاحسب قيمة $\sinh x$

الحـل :

$$\because \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \therefore \left(\frac{17}{15}\right)^2 - 1 = \sinh^2 x$$

$$\therefore \sinh^2 x = \frac{289 - 225}{(15)^2} = \frac{64}{225} \quad \therefore \sinh x = \pm \frac{8}{15}$$

مثال (٣) :

اذا كان $\sinh x = \tan\theta$ حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ فاحسب قيمة $\cosh x$

الحل :

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \cosh x = \sec\theta$$

وواضح ان $\sec\theta$ تكون موجبة فى النطاق $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

واكبر من الواحد الصحيح

مثال (٤) :

لجميع قيم « n » اثبت أن

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$$

الحل :

هذه يمكن اثباتها مباشرة من التعاريف الأولية والخاصية (١)

$$\because \quad \cosh a + \sinh a = e^a$$

فيكون الطرف الأيسر للمتطابقة هو :

$$(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx}$$

بينما نفس المتطابقة تعنى أن e^{nx} هى عبارة عن $(\cosh nx + \sinh nx)$

ومن ثم ينتج المطلوب .

٨ ـ ١ ـ ٧ تعريفات الدوال الزائدية الأخرى :

١ ـ تعريف الظل الزائدى Hyperbolic tangent :

تعرف دالة الظل الزائدى كما يلى :

$$\tan h\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ونلاحظ الآتى على هذه الدالة

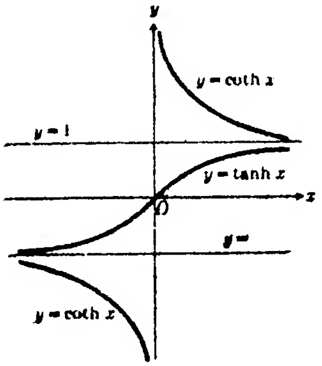
$$\lim_{x \to \infty} \tanh x = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

ويمكن اثبات أن :

$$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1$$

وهذه الدالة متصلة ومتزايدة فى مداها على النطاق $-\infty , \infty$ ومنحنى الدالة هو كما فى الشكل ٨ – ١ – ٤ ومن الملاحظ انهـا دالة فردية وموجبة لقيم « x » الموجبة وسالبة لقيم « x » السالبة .



شكل ٨ – ١ – ٤

٢ – ظل التمام الزائدى

Hyperbolic contangent

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

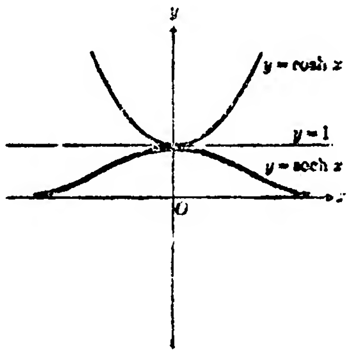
وهى دالة متصـــلة الا عند النقطة $x = 0$. وهى دالة تناقصية ولكنها موجبة لقيم « x » الموجبة وسالبة لقيم « x » السالبة ومنحنى هذه الدالة كما هو موضح فى الشكل ٨ – ١ – ٤ وكما هو واضـح من التعريف فهى دالة فردية . وهى عبارة عن مقلوب الدالة tanh x

٣ – القاطع الزائدى Hyperbolic secant :

هذه الدالة تعرف بالتالى :

$$\text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

ونلاحظ أن هذه الدالة دالة متصلة لجميع قيم « x » فى النطاق $(-\infty , \infty)$ وانها تؤول الى الصفر. عندما تؤول « x » الى $(+\infty)$ او الى $(-\infty)$. ومنحنى هذه الدالة كما هو الشكل ٨ ـ ١ ـ ٥



شكل ٨ ـ ١ ـ ٥

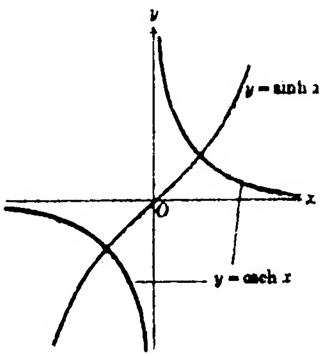
ونلاحظ أن هذه الدالة زوجية وأن لها نهاية عظمى عندما $(x = 0)$ وقيمتها $(y = 1)$

٤ ـ قاطع التمام الزائدى Hyperbolic cosecant

هى الدالة المعرفة بالتعريف

$$\text{cosech } x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

ونلاحظ أن هـــذه الدالة فردية ومتصلة الا عند النقطة $x = 0$ ومنحنى هذه الدالة كما هو مبين بالشكل ٨ـ١ـ٥ وهذه الدالة تناقصية وموجبـــة لقيم « x » الموجبـــة وسالبة لقيم « x » السالبة .



شكل ٨ ـ ١ ـ ٦

٨ ـ ١ ـ ٨ علاقات جبرية بين الدوال الزائدية :

يمكن اثبات العلاقات الآتية :

1) $1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$

2) $\coth^2 x - 1 = \text{cosech}^2 x$

3) $$\tanh (x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

لاحظ الاختلاف مع العلاقات المثلثية المقابلة (خاصة الاشارات) .

٨ ـ ١ ـ ٩ امثلة :

مثال (١) :

اذا كان $\sinh x = \frac{3}{4}$. فاحسب قيم الدوال الباقية

الحل :

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\therefore \cosh x = \frac{5}{4}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{4}{5} ,$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{4}{3}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{5}{3}$$

مثال (٢) :

اذا كان $\sinh x = \tan \theta$ حيث θ تقع فى النطاق $(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2})$

فاحسب بقية الدوال الزائدية .

الحل :

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\therefore \cosh x = \sec \theta$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \sin \theta$$

$$\therefore \quad \text{cosech } x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta$$

$$\therefore \quad \text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sec \theta} = \cos \theta$$

$$\therefore \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{1}{\sin \theta} = \text{cosec } \theta$$

مثال (٣) :

اثبت ان المسافة « r » من نقطة الاصل « 0 » الى النقطة P (cosh u, sinh u) على القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ تعطى من $r = \sqrt{\cosh 2u}$

الحل :

انظر شكل ٨ ــ ١ ــ ٣ . ولاحظ ان :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u} = \sqrt{\cosh 2u}$$

بند ٨ ــ ٢ الصيغ التفاضلية والتكاملية للدوال الزائدية :

سنتعرض فى هذا البند للصيغ التفاضلية والتكاملية للدول الزائدية التى عرفناها .

٨ ــ ٢ ــ ١ دالة الجيب الزائدى :

من تعريف هذه الدالة نجد ان : $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

وهى دالة متصلة كما بينا من قبل وزيادة على ذلك فهى دالة قابلة للتفاضل لجميع قيم « x » الحقيقية وباجراء التفاضل على طرفى التعريف نرى أن :

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(e^x - e^{-n}) = \tfrac{1}{2}[e^x - (- e^{-x})$$

$$= \tfrac{1}{2}[e^x + e^{-x}] = \cosh x$$

ويمكن صياغتها فى صورة المعامل التفاضلى الآتى :

$$d(\sinh x) = \cosh x\, dx$$

ومنها نصل الى الصيغة التكاملية وهى :

$$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$$

٨ ـ ٢ ـ ٢ جيب التمام الزائدى :

من التعريف $\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

وهى دالة متصلة كما سبق وعرفناها وقابلة للتفاضل . وبتفاضل الطرفين بالنسبة الى « x »

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cosh x)\ \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

أو التى يمكن صياغتها فى الصورة $d \cosh x = \sinh x\, dx$

أو يمكن كتابتها فى الصورة التكاملية $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$

لاحظ هنا الاختلاف فى الاشارات عن الدوال المثلثية .

٨ ـ ٢ ـ ٣ أمثلة :

مثال (١) :

أوجد تفاضل الدوال الآتية بالنسبة الى « x »

1) $y = \sinh 3x$ 2) $y = \cosh (2x + 1)$

الحــل :

1) $$\frac{dy}{dx} = \cosh 3x \,.\, 3 = 3 \cosh 3x$$

2) $\frac{dy}{dx} = \sinh(2x+1) \cdot 2 = 2\sinh(2x+1)$

مثال (٢) :

أوجد التكاملات الآتية :

1) $\int \cosh(2x+1)\,dx$

2) $\int \sqrt{\cosh 2x - 1}\,dx$

الحـل :

1) $\int \cosh(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\sinh(2x+1) + C$

من المتطابقات السابقة

2) $\because \cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$

$\therefore \cosh 2x - 1 = 2\sinh^2 x$

$\therefore \int \sqrt{\cosh 2x - 1}\,dx = \int \sqrt{2}\sinh x\,dx$

$= \sqrt{2}\cosh x + C$

مثال (٣) :

اثبت ان $y = A\cosh 3x$ تحقق المعادلة التفاضلية ($y'' - 9y =$

الحـل :

$y' = 3A\sinh 3x \quad , \quad y'' = 9A\cosh 3x = 9y$

$\therefore \quad y'' - 9y = 0$

٨ ــ ٢ ــ ٤ دالة الظل الزائدى :

كما قدمنا من قبل فان هذ هالدالة $y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

دالة متصلة وزيادة على ذلك فهى قابلة للتفاضل وباجراء عملية التفاضل على طرفى التعريف نجد أن :

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

او فى صورة المعامل التفاضلى $d \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \, dx$

او يمكن وضعها فى الصورة التكاملية الآتية :

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + C$$

٨ ـ ٢ ـ ٥ دالة القاطع الزائدى :

هذه الدالة متصلة لجميع قيم « x » ويمكن اجراء التفاضل عليها

$$y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

باجراء التفاضل نحصل على :

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = -\tanh x \operatorname{sech} x$$

او $d \operatorname{sech} x = -\tanh x \operatorname{sech} x \, dx$

الصيغة التكاملية لها هى :

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = \operatorname{sech} x + C$$

٨ ـ ٢ ـ ٦ دالة ظل التمام الزائدى :

هذه الدالة والدالة التالية (وهى دالة قاطع التمام الزائدى) دوال غير متصلة عند نقطة الأصل . لذلك يمكن اجراء التفاضـــل لهذه الدوال فى النطاق $(0, \infty) \cup (-\infty, 0)$ اى فى النطاق المثقوب $|x| > 0$

ولنتعرض الآن لتفاضل دالة ظل التمام الزائدى حيث $|x| > 0$

$$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (x \neq 0)$$

باجراء التفاضل

$$\frac{d}{dx}\coth x = \frac{\sinh x . \sinh x - \cosh x . \cosh x}{\sinh^2 x}$$

$$= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x, \ (x \neq 0)$$

أو فى صورة المعامل التفاضلى

$$d \coth x = -\operatorname{cosech}^2 x \, dx$$

أو فى الصورة التكاملية

$$\int \operatorname{cosech}^2 x \, dx = -\coth x + C$$

٨ ــ ٢ ــ ٧ دالة قاطع التمام الزائدى :

وهى المعرفة كما يلى :

$$y = \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

باجراء التفاضل كما سبق وبينا من قبل بعيدا عن نقطة الانفصال نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sinh x} = \frac{-\cosh x}{\sinh^2 x} \qquad (x \neq 0)$$

$$= -\coth x \operatorname{cosech} x$$

أو فى صورة المعامل التفاضلى

$$d \operatorname{cosech} x = -\operatorname{cosech} x \coth x \, dx$$

أو فى الصورة التكاملية

$$\int \operatorname{cosech} x \coth x \, dx = -\operatorname{cosech} x + C$$

٨ ــ ٢ ــ ٨ أمثلة :

مثال (١) :

أوجد تفاضلات الدوال الآتية :

1) $y = \tanh 2x$ 2) $y = \coth(\tan x)$

3) $y = 4 \operatorname{cosech} \frac{x}{4}$ 4) $y = \cosh^2 x - \sinh^2 x$

الحـل :

1) $y = \tanh 2x \qquad \therefore y' = \operatorname{sech}^2 2x \quad 2 = 2 \operatorname{sech}^2 2x$

2) $y = \coth (\tan x)$

$$\therefore y' = -\operatorname{cosech}^2 (\tan x).\sec^2 x \ (x \neq 0)$$

3) $y = 4\operatorname{cosech} \frac{x}{4} \quad \therefore y' = -4 \operatorname{cosech} \frac{x}{4} \coth \frac{x}{4} . \frac{1}{4}$

$$= -\operatorname{cosech} \frac{x}{4} \coth \frac{x}{4} \ (x \neq 0)$$

ونترك الأخير كتمرين للقارىء

مثال (٢) :

أوجد التكاملات الآتية :

1) $\int \tanh x \, dx$ 2) $\int \frac{\sinh x}{\cosh^4 x} dx$

3) $\int \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} dx$ 4) $\int \tanh^2 x \, dx$

الحـل :

١ ــ (واضح أن البسط تفاضل المقام)

$$\int \tanh x \, dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \ln (\cosh x) + C$$

٢ ــ نفرض أن :

$u = \cosh x \qquad \therefore du = \sinh x \, dx$

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh^4 x} dx = \int \frac{1}{u^4} du = \int u^{-4} du$$

$$= \frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3} \cosh^{-3} x + C$$

$$= -\frac{1}{3} \operatorname{sech}^3 x + C$$

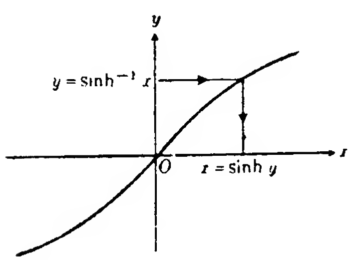
3) $$\int \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} dx = \int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + C$$

4) $$\int \tanh^2 x \, dx = \int (1 - \operatorname{sech}^2 x) \, dx = x - \tanh x + C$$

٨ – ٣ معكوس الدوال الزائدية Inverse Hyperbolic Functions :

سنتعرض فى هذا البند لمعكوس الدوال الزائدية . وكما سبق للقارىء ان تعرف على $f^{-1}(x)$ معكوس الدالة $f(x)$ وهو اذا كانت $f = \{(x, y) : y = f(x)\}$ فان $f^{-1} = \{(x, y) : x = f(y)\}$ أى نبدل « x » مكان « y » فى معالة الدالة وسنفصل فيما يلى معكوس الدوال الزائدية . وقد يكون معكوس الدالة دالة اخرى أو علاقة .

٨ – ٣ – ١ معكوس دالة الجيب الزائدى :



شكل ٨ – ٣ – ١

ويرمز له بالرمز (arsinh) أو $\sinh^{-1}$ والدالة $y = \sinh^{-1} x$ ومن الواضح كما فى شكل ٨–٣–١ فان هذه الدالة فردية وموجبة لجميع قيم « x » الموجبة وسالبة لجميع قيم « x » السالبة وهى دالة تزايدية

ويمكن وضع هذه الدالة فى صورة لوغاريتمية كما يلى :

$$\therefore \; y = \sinh^{-1} x \qquad \therefore \; x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$\therefore \quad e^y - e^{-y} = 2x \qquad \therefore \quad e^y - 2x - e^{-y} = 0$

وبالضرب فى e^y نجـد $\quad \therefore \quad (e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية فى e^y

$$\therefore \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

وبما أن e^y يجب ان تكون موجبة فان الاشارة السـالبة مرفوضة

$$\therefore \quad e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore \quad y = \sinh^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

٨ ـ ٣ ـ ١ ـ ١ الصيغ التفاضلية والتكاملية لمعكوس دالة الجيب الزائدى :

من تعريف الدالة كما سبق $\quad x = \sinh y \quad \therefore \quad y = \sinh^{-1} x$

باجراء التفاضل بالنسبة الى « y » نحصل على

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

والصيغة التكاملية هى :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \sinh^{-1} x + C$$

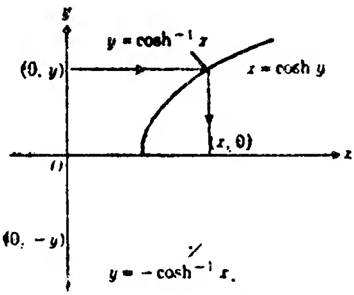
٨ ـ ٣ ـ ٢ معكوس دالة جيب التمام الزائدى :

ويرمز لها بالرمز arcosh أو $\cosh^{-1}$ والدالة $y = \cosh^{-1} x$

من تعريف معكوس الدالة نحصل على $x = \cosh y$ ونطاق الدالة $[1, \infty)$

ومن الملاحظ انه من الشــكل ٨ – ٣ – ٢ فان معكوس دالة جيب التمام ماهو الا عبـــارة عن علاقة وناخذ $y > 0$ لتصير دالة

ويمكن التعبير عن $y = \cosh^{-1} x$ في صـــورة دالة لوغاريتمية وذلك كما فعلنا فى البند السابق .



شكل ٨ – ٣ – ٢

$$\because \quad x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \qquad \therefore \quad 2x = e^y + e^{-y}$$

$$\therefore \quad e^y - 2x + e^{-y} = 0 \qquad \therefore \quad (e^y)^2 - 2x(e^y) + 1 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية فى e^y

$$\therefore \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \quad y = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

والملاحظ ان كلا الجــذرين موجب وسنرى فيمــا يلى أن قيمتى اللوغاريتم للجذرين متساويان مقدارا ومختلفان فقط فى الاشارة وذلك لما يلى :

$$y_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$y_2 = \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \ln \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = -y_1$$

وعليه فاننا سنكتب $\cosh^{-1} x = y_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

٨ ـ ٣ ـ ٢ ـ ١ الصيغ التفاضلية والتكاملية لمعكوس دالة جيب التمام الزائدى :

من التعريف $y = \cosh^{-1} x$ ومنهـا $x = \cosh y$ وباجراء التفاضل بالنسبة الى « x » نحصل على :

$$1 = \sinh y \frac{dy}{dx} = \sqrt{\cosh^2 y - 1}\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}\,\frac{dy}{dx}$$

ومنها نجد :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (\,|x| > 1\,)$$

ويمكن وضعها فى الصيغة التكاملية

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \cosh^{-1} x + C\,, \qquad |x| > 1$$

٨ ـ ٣ ـ ٢ ـ ٢ أمثلة :

مثال (١) :

أوجد تفاضل هذه الدوال بالنسبة الى « x »

1) $\sinh^{-1} \dfrac{x}{a}$ 2) $\cosh^{-1} \dfrac{1}{x}$

3) $\cosh^{-1} (\sec x)$ 4) $\sinh^{-1} (\tan x)$

الحـــل :

1) $$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + (x/a)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

2) $$\frac{d}{dx} \left(\cosh^{-1} \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1/x)^2 - 1}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$= - \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$3)\quad \frac{d}{dx}(\cosh^{-1}\sec x) = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}} \cdot \sec x \tan x$$

$$= \sec x$$

$$4)\quad \frac{d}{dx}(\sinh^{-1}\tan x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \cdot \sec^2 x = \sec x.$$

مثال (٢) :

اثبت ان :

$$\sinh^{-1}(\tan x) = \cosh^{-1}(\sec x)$$

الحل :

نستخدم الصورة اللوغاريتمية لكل من هاتين الدالتين فكما نعرف ان

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\therefore\quad \sinh^{-1}(\tan x) = \ln(\tan x + \sqrt{1 + \tan^2})$$

$$= \ln(\tan x + \sec x) \qquad (1)$$

$$\therefore\quad \cosh^{-1}(\sec x) = \ln(\sec x + \sqrt{\sec^2 x - 1})$$

$$= \ln(\sec x + \tan x) \qquad (2)$$

من (1) , (2) يثبت المطلوب

وعموما فانه يمكن اثبات أن :

$$\sinh^{-1} x = \cosh^{-1}\sqrt{1+x^2}$$

وسنثبت هذه بطريقة اخرى

لنفترض ان $y = \sinh^{-1} x$ فيكون $x = \sinh y$ وبما ان

$$\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$$

$$\therefore\quad \cosh^2 y = 1 + x^2 \qquad \therefore\quad \cosh y = \sqrt{1+x^2}$$

$$\therefore\quad y = \cosh^{-1}\sqrt{1+x^2} \quad \therefore\quad y = \cosh^{-1}\sqrt{1+x^2} = \sinh^{-1} x$$

مثال (٣) :

أوجد $\lim_{x \to \infty} (\cosh^{-1} x - \ln x)$

الحـل :

نستخدم الصورة اللوغاريتمية للدالة $\cosh^{-1} x$

$$\therefore \quad \cosh^{-1} x - \ln x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) - \ln x$$

$$= \ln \left(\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x} \right) = \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$$

وبأخذ النهاية عندما $x \to \infty$ نجد ان :

$$\lim_{x \to \infty} (\cosh^{-1} x - \ln x) = \lim_{x \to \infty} \ln \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= \ln 2$$

مثال (٤) :

أوجد قيمة التكامل $\int \frac{e^t \, dt}{\sqrt{1 + e^{2t}}}$

الحـل :

نفرض أن $u = e^t$ ومنها $du = e^t \, dt$

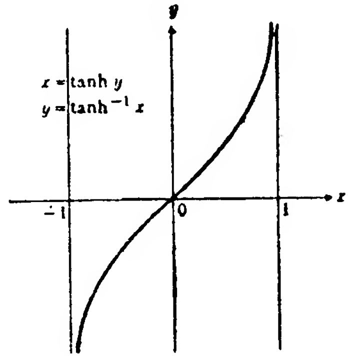
$$\therefore \quad \int \frac{e^t \, dt}{\sqrt{1 + e^{2t}}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \sinh^{-1} u + C$$

$$= \sinh^{-1} e^t + C = \ln (e^t + \sqrt{1 + e^{2t}}) + C$$

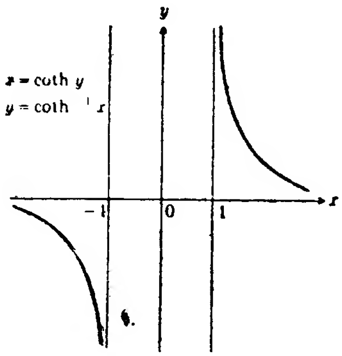
٨ ـ ٣ ـ ٣ معكوسا دالتى الظل الزائدى وظل التمام الزائدى :

بالنسبة لدالة الظل الزائدى فان معكوسها نرمز له بالرمز $\tanh^{-1}$ ومعكوس الدالة $y = \tanh^{-1} x$ موجود فى النطاق $|x| < 1$ اى فى النطاق $(-1 , 1)$ بينما مداها $(-\infty , \infty)$ ونلاحظ أنها دالة متصلة فى هـذا

النطاق وهي موجبة لقيم « x » الموجبة وسالبة لقيم « x » السالبة فى هذا النطاق ومنحنى هذه الدالة فى الشكل ٨ ــ ٣ ــ ٣ أما معكوس دالة ظل التمام $y = \coth^{-1} x$ وهــذه الدالة موجودة فى النطـــاق المثقوب $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ او $|x| > 1$ ونلاحظ انها دالة غير متصلة عند النقطتين $x = \pm 1$ ومنحنى هذه الدالة فى الشكل ٨ ــ ٣ ــ ٤



شكل ٨ ــ ٣ ــ ٣



شكل ٨ ــ ٣ ــ ٤

ويمكن صياغة هاتين الدالتين فى صورة لوغاريتمية كما يلى :

$$y = \tanh^{-1} x \;\therefore\; x = \tanh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}$$

$$\therefore\; x\,e^{y} + x\,e^{-y} = e^{y} - e^{-y}$$

$$\therefore\; (1 - x)\,e^{y} = (1 + x)\,e^{-y}$$

$$\therefore\; e^{2y} = \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \;\therefore\; 2y = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$\therefore\; y = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

بشرط أن $|x| < 1$

وبنفس الطريقة يمكن استنتاج الصورة اللوغاريتمية لمعكوس دالة ظل التمام الزائدى وهى الصورة

$$\coth^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) \qquad , |x| > 1$$

٨ ـ ٣ ـ ٣ ـ ١ الصيغ التفاضلية والتكاملية لهاتين الدالتين :

سنستغل الصورة اللوغاريتمية والتعريف لايجاد الصيغ التفاضلية والتكاملية للدالة $\tanh^{-1} x$ ثم نذكر ذلك لدالة $\coth^{-1} x$ مباشرة

الطريقة الأولى لتفاضل $\tanh^{-1} x$

$$y = \tanh^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) = \tfrac{1}{2} [\ln (1 + x) - \ln (1 - x)]$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \right] = \frac{1}{1 - x^2} , |x| < 1$$

الطريقة الثانية :

$$y = \tanh^{-1} x \qquad \therefore \quad x = \tanh y$$

وبتفاضل الطرفين

$$\therefore \quad 1 = \operatorname{sech}^2 y \frac{dy}{dx} = (1 - \tanh^2 y) \frac{dy}{dx}$$

$$= (1 - x^2) \frac{dy}{dx}$$

ومنها نجد ماحصلنا عليه سابقا

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2} , |x| < 1$$

بينما نجد انه فى حالة معكوس دالة ظل التمام الزائدى يكون تفاضلها

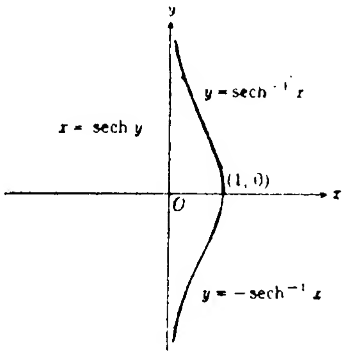
$$\frac{d}{dx} \coth^{-1} x = \frac{-1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2} , \quad |x| > 1$$

ومن الملاحظ ان تفاضل الدالتين نتيجته واحدة ولكن يجب ان نلاحظ النطاق لكل دالة ومن ثم نجد الصيغ التكاملية لهاتين الدالتين هى :

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \tanh^{-1} x + C \; ; \; |x| < 1 \\ \coth^{-1} x + C \; ; \; |x| > 1 \end{cases}$$

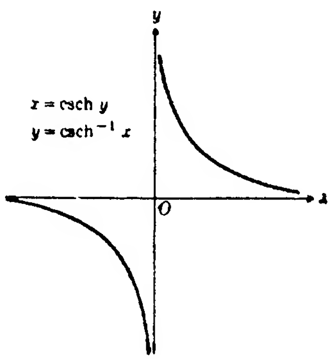
٨ ـ ٣ ـ ٤ معكوسا دالتى القاطع الزائدى وقاطع التمام الزائدى :

بالنسبة لدالة القاطع الزائدى فان معكوسها $y = \text{arsech}\, x = \text{sech}^{-1} x$ عبارة عن علاقة كما نرى من المنحنى الملاصق شكل ٨ ـ ٣ ـ ٥ فهذا المنحنى يبين العلاقة بين (x, y) ونلاحظ ان النطاق $(0, 1]$ ومدى العلاقة $(-\infty, \infty)$ ومدى الدالة $(0, \infty)$. نذكر ان تعريف الدالة هى علاقة بحيث كل قيمة للمتغير « x » يناظرها قيمة واحدة للمتغير y) .



شكل ٨ ـ ٣ ـ ٥

اما معكوس دالة قاطع التمام الزائدى $y = \text{csch}^{-1} x$ فهى دالة ونطاقها على جميع « R » ما عدا $x = 0$ اى نطاقها $(0,\infty) \cup (-\infty,0)$ وكذلك مداها على جميع « R » ومرة اخرى نجد أن هذه الدالة غير متصلة عند نقطة الأصل (انظر شكل ٨ ـ ٣ ـ ٦) .



شكل ٨ ـ ٣ ـ ٦

ويمكن كتابة الصورة اللوغاريتمية لهاتين الدالتين كما يلى :

$$\text{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$\text{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$$

ولنترك للقارىء اثبات هاتين الصيغتين .

وفيا يلى سنتعرض للصيغ التفاضلية والتكاملية لهاتين الدالتين .

٨ ــ ٣ ــ ٤ ــ ١ الصيغ التفاضلية والتكاملية :

بالنسبة لمعكوس دالة القاطع الزائدى

$$y = \text{sech}^{-1} x \qquad \therefore \quad x = \text{sech } y$$

باجراء التفاضل بالنسبة الى « x » نحصل على

$$1 = -\text{sech } y \tanh y \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad 1 = -\text{sech } y \sqrt{1 - \text{sech}^2 y} \frac{dy}{dx}$$

$$= -x \sqrt{1 - x^2} \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \text{sech}^{-1} x = \frac{-1}{x \sqrt{1 - x^2}}, \qquad |x| < 1$$

والصيغة التكاملية هى :

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - x^2}} = -\text{sech}^{-1} x + C, \qquad |x| < 1$$

بينما بالنسبة لمعكوس قاطع التمام الزائدى

$$y = \text{csch}^{-1} x \qquad \therefore \quad x = \text{csch } y$$

ومنها نجد أن :

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}, \qquad x \neq 0$$

بينما صيغتها التكاملية هى :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\operatorname{csch}^{-1} x + C$$

٨ ـ ٣ ـ ٤ ـ ٢ امثلة :

مثال (١) :

أوجد تفاضلات الدوال الآتية بالنسبة الى « x »

1) $\tanh^{-1}(\sin x)$ 2) $\coth^{-1}(\sec x)$

3) $\operatorname{sech}^{-1}(\cos x)$ 4) $\operatorname{csch}^{-1}(\tan x)$

الحـل :

1) $$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(\sin x) = \frac{1}{1-\sin^2 x}\cos x$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

2) $$\frac{d}{dx}\coth^{-1}(\sec)\ x = \frac{1}{1-\sec^2 x}\ .\ \sec x\ .\ \tan x$$

$$= -\frac{\sec x}{\tan x} = \frac{-1}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x$$

$$3)\quad \frac{d}{dx}\,\text{sech}^{-1}(\cos x) = \frac{-1}{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot(-\sin x)$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$4)\quad \frac{d}{dx}\,\text{csch}^{-1}(\tan x) = \frac{-1}{\tan x\sqrt{1+\tan^2 x}}(\sec^2 x)$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan x \sec x} = \frac{-1}{\sin x} = -\text{cosec } x.$$

مثال (٢) :

اوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$1)\quad \int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} \qquad\qquad 2)\quad \int_3^5 \frac{dx}{4-x^2}$$

$$3)\quad \int \frac{\sin x\, dx}{1-\cos^2 x} \qquad\qquad 4)\quad \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^2\theta - 1}$$

الحــل :

(i) كما علمنا من قبل فان نتيجة التكامل $\int \frac{dx}{4-x^2}$ أما ان يكون

$\frac{1}{2}\tanh^{-1} x/2$ or $\frac{1}{2}\coth^{-1} x/2$ حسب النطاق (ليتحقق القارىء من ذلك)

ومن ثم فان :

$$\int_0^1 \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{2}\left[\tanh^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\tanh^{-1}\frac{1}{2} - \tanh^{-1} 0$$

$$= \frac{1}{2} \tanh^{-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{4} \ln 3$$

(ii) يكون

$$\int_3^5 \frac{dx}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{2} \coth^{-1} \frac{x}{2} \right]_3^5$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1 + x/2}{x/2 - 1} \right) \right]_3^5 = \frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{x + 2}{x - 2} \right) \right]_3^5$$

$$= \frac{1}{4} \left[\ln \frac{7}{3} - \ln \frac{5}{1} \right] = \frac{1}{4} \ln \frac{7}{15}$$

(iii) بوضع $u = \cos x$, $du = \sin x \, dx$

$$\int \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{- du}{1 - u^2}$$

$$= -\tanh^{-1} u + C = -\tanh^{-1} (\cos x) + C$$

قارن هذه النتيجة مع تكامل $\csc x$ واستنتج العلاقة .

(iv) بوضع $u = \tan \theta$, $du = \sec^2 \theta \, d\theta$

$$\int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{\sqrt{\tan^2 \theta - 1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

$$= \cosh^{-1} u + C = \cosh^{-1} (\tan \theta) + C$$

لابد هنا ان تكون $\tan \theta > 1$ اى $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

تمــارين

١ ـ اثبت مايلى :

1) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

2) $\tanh x = \sinh 2x (1 + \cosh 2x)^{-1}$

3) $\sinh 3u = 3 \sinh u + 4 \sinh^3 u$

4) $\cosh 3u = -3 \cosh u + \cosh^3 u$

٢ ـ جسيم يتحرك فى اتجاه محور « x » طبقـا لاحدى العلاقتين الآتيتين :

1) $x = a \cos kt + b \sin kt$

2) $x = A \cosh kt + B \sinh kt$

حيث B, A, b, a, k ثوابت

اثبتأن العجلة فى الحالتين تتناسب مع « x » وما هو الفرق فى الحالتين ؟

٣ ـ اثبت أن الدوال الآتية :

$y = \cosh kx,\ y = \text{sink } kx,\ y \equiv \cos kx,\ y = \sin kx$

تحقق جميعها العلاقة $\dfrac{d^4y}{dx^4} = k^4 y$

٤ ـ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية :

1) $y = \sinh^2 3x$

2) $\tan x = \tanh^2 y$

3) $\sin^{-1} x = \text{sech } y$

4 $\sinh y = \sec x$

5) $\tan^{-1} y = \tanh^{-1} x$

6) $y = \tanh (\ln x)$

7) $x = \cosh (\ln y)$

8) $y = \sinh (\tan^{-1} e^{3x})$

9) $y = \operatorname{sech}^{-1} (\sin 4x)$

10) $y^2 + x \cosh y + \sinh^2 x = 50 \sin^{-1} y.$

٥ ـ أوجد قيم التكاملات الآتية :

1) $\int \frac{d\theta}{\sinh\theta + \cosh\theta}$

2) $\int \frac{\cosh\theta \, d\theta}{\sinh\theta + \cosh\theta}$

3) $\int \sinh^2 \theta \, d\theta$

4) $\int \cosh^3 \theta \, d\theta$

5) $\int e^x \sinh 2x \, dx$

6) $\int e^{-x} \cosh x \, dx$

7) $\int \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} dt$

8) $\int_0^2 \frac{dx}{9 - x^2}$

9) $\int_4^6 \frac{dx}{9 - x^2}$

10) $\int \frac{dt}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$

11) $\int \frac{\sin 2x \, dx}{1 - \cos^2 2x}$

12) $\int \frac{\sec^2 3\theta \, d\theta}{\sqrt{\tan^2 3\theta - 1}}$

13) $\int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

14) $\int \sqrt{\cosh x - 1} \, dx$

٦ ـ بالنسبة للمنحنى $y = a \cosh x/a$ اذا قيس طول قوس المنحنى من أسفل نقطة وليكن « s » فاثبت ان $\frac{s}{a} = \frac{dy}{dx}$ وان

$y^2 = s^2 + a^2$

(يعرف هذا المنحنى بمنحنى الكتينة)

٧ ـ أوجد قيمة النهايات الآتية :

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \int_1^x \left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} - \frac{1}{t} \right) dt$

2) $\lim_{x \to \infty} \int_1^x \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} - \frac{1}{t}\right) dt.$

3) $\lim_{x \to \infty} (\cosh^{-1} x - \ln x)$

٨ ـ أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y = a \cosh \frac{x}{a}$
والخطوط $(c > 0)$ $y = 0, x = 0, x = c$ واثبت أنها تكافىء
مساحة مستطيل طوله « a » وارتفاعه $L (c)$. حيث $L (x)$ هو طول
المنحنى فى النطاق $[0, x]$

٩ ـ اذا اديرت المساحة فى التمرين السابق حول المحور السينى
فأوجـد :

(أ) الحجم الناتج (ب) مساحة السطح الناشىء

الباب التاسع

مفكوكات الدوال

EXPANSIONS

نناقش فى هذا الباب امكانية استبدال دوا لكثيرة حدود بدوال اخرى (اسية أو لوغاريتمية او مثلثية ...) كتقريب لهذه الدوال حول نقطة معينة (أو فى نطاق معين) . وان كانت الدراسة الكاملة والدقيقة لهذه المفكوكات تتطلب دراية بفنون أخرى من ضروب التحليل (مثل تقارب المتسلسلات) ، الا اننا سنحاول ان ندرسها مع بعض التساهل .

٩ ـ ١ مفكوك تايلور :

نفرض ان الدالة $y = f(x)$ دالة قابلة للتفاضل حتى درجة $(n + 1)$ فى نطاق يحتوى النقطة $x = a$ ونفرض ان هناك كثيرة حدود $y = P_n(x)$ من درجة « n » بحيث تحقق الشروط التالية :

$$P_n(a) = f(a) \; , \; P_n'(a) = f'(a) \; , \; P_n''(a) = f''(a)$$
$$\ldots , \ldots . \; P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \; . \qquad (1)$$

فيمكننا القول ان قيمتى الدالتين $P_n(x)$, $f(x)$ قريبتان عند النقطة $x = a$.

وحيث ان $P_n(x)$ كثيرة حدود من درجة « n » فى نطاق حول $x = a$ فانه يمكننا كتابتها فى الصورة

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 \ldots + C_n(x - a)^n \quad (2)$$

وباستخدام العلاقات فى (١) نجد ان :

$$P_n(a) = C_0 = f(a) \quad \therefore \quad C_0 = f(a).$$

$$P_n'(a) = 1.C_1 = f'(a)$$

$$\therefore \quad C_1 = f'(a) = \frac{1}{1\,!} f'(a)$$

$$P_n''(a) = 2.1\ C_2 = f''(a)$$

$$\therefore \quad C_2 = \frac{1}{2.1} f''(a) = \frac{1}{2\,!} f''(a)$$

... ...

$$P_n^{(n)}(a) = n\,(n-1) \ldots .\ 2.1\ C_n = f^{(n)}(a)$$

$$\therefore \quad C_n = \frac{1}{n\,!} f^{(n)}(a).$$

(3)

وبالتعويض فى المعادلة (٢) نحصل على :

$$P_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1\,!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} f''(a) + \ldots .$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(a). \qquad (4)$$

ومن ثم يمكننا القول بما يلى :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

حيث $R_n(x)$ تمثل الفرق بين قيمتى الدالتين $f(x)$, $P_n(x)$ ويطلق على $R_n(x)$ الباقى «Remainder» وعندما تكون قيمة $R_n(x)$ صغيرة لقيم « x » فى النطاق المدروس فان كثيرة الحـــدود $P_n(x)$ تمثل تقريبا للدالة $f(x)$ عند قيم « x » هذه . وعليه يمكننا كتابة الدالة $f(x)$ فى الصورة

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1\,!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} f''(a)$$

$$+ \frac{(x-a)^3}{3\,!} f'''(a) + \ldots . + \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(a) + R_n(x) \qquad (5)$$

حيث « x » قريبة من « a » وواقعة فى النطاق الخاضع للدراسة يطلق على التعبير (5) « مفكوك تايلور » للدالة f (x) حول النقطة x = a

أما اذا كنا ندرس مفكوك الدالة حول النقطة الخاصة x = 0 فان المفكوك (5) فى هذه الحالة يصير

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0)$$

$$+ \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f(0) + R_n(x) \qquad (6)$$

الذى يطلق علية « مفكوك ماكلورين » للدالة حول x = 0 .

ويمكننا كتابة $R_n(x)$ فى الصورة التالية :

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \qquad c \in (a, x).$$

التى يطلق عليها « صورة لاجرانج » للباقى . وتتطلب الدراسة الدقيقة تقدير هذا المقدار ودراسة تصرفه عندما $n \to \infty$ ولا يكون المفكوك صحيحا الا اذا تقارب هذا المقدار الى الصفر بطرق عامة ليس هنا مجال شرحها .

ولاثبات هذه الصيغة نستخدم نظرية القيمة المتوسطة (أو نظرية رول Rolle)

لنكتب $R_n(x)$ فى الصورة $R_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!} r_n(x)$

ونفرض :

$$g(x) = f(y) - f(x) - \frac{(y - x)}{1!} f(x) - \frac{(y - x)^2}{2!} f''(x)$$

$$\ldots - \frac{(y - x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{(y - x)^{n+1}}{(n+1)!} r_n$$

حيث x, y واقعتـــان فى نطـاق الدالة والمفكوك (5)

فمن الملاحظ ان $g(x)$ تتلاشى عندما $x = y$ وعندما $x = a$ وذلك من العلاقة (5) (هنا تعتبر « y » قيمة محددة). فحسب الآن $g'(x)$ فنجد :

$$g'(x) = -\frac{(y-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(y-x)^n}{n!} r_n$$

فحسب نظرية رول يتلاشى هذا المقدار عند نقطة $x = c$ واقعة فى (x, y) اى ان :

$$-f^{n+1} + r_n = 0 \qquad \therefore r_n = f^{n+1}(c)$$

ومنها نجد صيغة لاجرانج للباقى

وفيما نسوقه من امثلة او مسائل فان الباقى يتقارب الى الصــفر ومن ثم فلن نتعرض له (الا فى المثال الأول فقط) .

مثال ٩ ــ ١ ــ ١ :

اكتب مفكوك ماكلورين للدالة الأسية $y = e^x$ حول نقطة الأصل

الحــل :

نحسب قيم الدالة وتفاضلاتها المختلفة عند النقطـــــة $x = 0$. فنجد ان :

$$f(x) = e^x \qquad \therefore f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \qquad \therefore f'(0) = e^0 = 1.$$

$$f''(x) = e^x \qquad \therefore f''(0) = e^0 = 1.$$

ومن ثم نجد ان :

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad \therefore f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

وبتطبيق صيغة ماكلورين نجد :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots$$

وفى هذا المثال بالذات سندرس الباقى ونثبت انه يتقارب الى الصفر حيث صيغة لاجرانج للباقى نجد ان :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

وحيث ان $c \in (0, x)$ فان « e^c » تكون اقل من « e^x » لقيم « x » الموجبة ، تكون أقل من (١) لقيم « x » السالبة . وفى كلا الحالين فان « e^c » تكون محدودة ويلزمنا الآن معرفة تصرف $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ عندما تؤول $n \to \infty$.

اذا كانت « x » محدودة فانه يوجد عدد صحيح N بحيث $|x| < N < n$ ومن ثم نرى ان :

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{N} \cdot \frac{x}{N+1} \cdot \ldots\ldots \frac{x}{(n+1)}\right|$$

$$= \frac{|x|}{1} \; \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \ldots \frac{|x|}{N-1} \cdot \frac{|x|}{N} \cdot \frac{|x|}{N+1} \ldots\ldots \frac{|x|}{n+1}$$

فاذا كتبنا $\frac{|x|}{N} = q$ فان $q < 1$ ومن ثم يكون

$$\frac{|x|}{N+1} < q \,, \quad \frac{|x|}{N+2} < q \,, \ldots\ldots$$

ومن ثم نجد أن :

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big| < \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \ldots\ldots \frac{|x|}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot q \ldots\ldots q$$

$$= \frac{|x^{(N-1)}|}{(N-1)!} \cdot q^{(n+1)-(N-1)} = \frac{|x^{(N-1)}|}{(N-1)!} q^{n-N+2}$$

وحيث ان $q < 1$ والمقدار $\frac{|x^{N-1}|}{(N-1)!}$ محدود فان $q^n \to 0$

ومن ثم نرى أن :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \qquad o < c < x$$

يؤول الى الصفر عندما $n \to \infty$. وعليه يكون المفكوك صحيحا .

اى ان :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

تمرين :

اثبت أن :

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

مثال (٩ ـ ١ ـ ٢) :

اثبت أن :

$$\text{Sinh } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

الحل :

سبق وأن عرفنا

$$\text{Sinh } x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

ومن المثالين السابقين نجد الآتى :

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left\{ \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \right\}$$

$$= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

تمـرين :

استخدم نتيجة المثال ٩ ــ ١ ــ ١ والتمرين فى اثبات ان :

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

مثال ٩ ــ ١ ــ ٣ :

اكتب صيغة ماكلورين للدالة $f(x) = \sin x$

الحـل :

نحسب قيم الدالة وتفاضلاتها عند النقطة $x = 0$.

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad \therefore\ f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \sin x = -f(x) \qquad \therefore\ f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = -f'(x) \qquad \therefore\ f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = f(x) \qquad \therefore\ f^{(4)}(0) = 0$$

ويمكننا أن نعمم النتائج السابقة الى مايلى :

$$f^{(4n)}(x) = \sin x = f(x) \qquad \therefore\ f^{(4n)}(0) = 0$$

$$f^{4n+1}(x) = f'(x) = \cos x \qquad \therefore\ f^{4n+1}(0) = 1$$

$$f^{4n+2}(x) = f''(x) = -\sin x \qquad \therefore \quad f^{4n+2}(0) = 0$$

$$f^{4n+3}(x) = f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad \therefore \quad f^{4n+3}(0) = -1.$$

ومن ثم نرى أن معاملات القوى الزوجية تتلاشى وتتبقى فقط القوى الفردية فى المفكوك باستخدام القيم السابقة فى مفكوك ماكلورين نجد :

$$\operatorname{Sin} x = \frac{x}{1\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \ldots\ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$$

مثال ٩ ــ ١ ــ ٤ :

اكتب مفكوك ماكلورين للدالة $f(x) = \cos x$

الحـــل :

نحسب قيم الدالة وتفاضلاتها عندما $x = 0$ فنجد :

$$f(x) = \cos x \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos = -f(x) \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = -\sin x = -f'(x) \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = f(x) = \cos x \qquad f^{(4)}(0) = 1.$$

وبالعموم نجد أن :

$$f^{4n}(x) = f(x) = \cos x \qquad \therefore \quad f^{4n}(0) = 1$$

$$f^{4n+1}(x) = f'(x) = -\sin x \qquad \therefore \quad f^{4n+1}(0) = 0$$

$$f^{4n+2}(x) = f''(x) = -\cos x \qquad \therefore \quad f^{4n+2}(0) = -1$$

$$f^{4n+3}(x) = f^{(3)}(x) = -\sin x \qquad \therefore \quad f^{4n+3}(0) = 0$$

ومن الملاحظ هنا أن معـــاملات القوى الفردية تتلاشى وتتبقى فقط معاملات القوى الزوجية ويصير المفكوك كما يلى :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \ldots\ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)\,!}$$

تمـرين :

باستخدام المفكوكات السابقة استنتج مايلى (حيث $i = \sqrt{-1}$)

1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 2) $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

ومن ثم استنتج

3) $\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$,

4) $\text{six } x = \frac{1}{2\,i} (e^{ix} - e^{-ix})$.

مثال ٩ ــ ١ ــ ٥ :

اكتب الحدود الأربعة الأولى من مفكوك تايلور للدالة $y = \sqrt{x}$ قريبا من $x = 1$.

الحـل :

نحسب قيم هذه الدالة وتفاضلاتها عندما $x = 1$. فنجد :

$f\ (x) = \sqrt{x}$ $\therefore\ f\ (1) = 1.$

$f'\ (x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\ (x)^{-1/2}$ $\therefore\ f'\ (1) = \frac{1}{2}.$

$f''\ (x) = \frac{1}{2}\ (-\frac{1}{2})\ x^{-3/2}$ $\therefore\ f''\ (1) = \frac{1}{2}\ (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}.$

$f'''(x) = \frac{1}{2}\ (-\frac{1}{2})\ (-3/2)\ x^{-5/2}$

$\therefore\ f'''\ (1) = \frac{1}{2}\ (-\frac{1}{2})\ (-3/2) = 3/8.$

وتكون الحدود الأربعة الأولى من المفكوك هى :

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{(x-1)}{1\,!}(\tfrac{1}{2}) + \frac{(x-1)^2}{1\,!}(-\tfrac{1}{4})$$

$$+ \frac{(x-1)^3}{3\,!}(3/8) + \ldots\ldots = 1 + \tfrac{1}{2}(x-1)$$

$$-(1/8)(x-1)^2 + (1/16)(x-1)^3 + \ldots\ldots$$

مثال ٩ ـ ١ ـ ٦ :

اكتب الحدين الأولين من مفكوك ماكلورين للدالة $y = \ln \cos x.$

الحـل :

$$f(x) = \ln \cos x \qquad f(0) = \ln \cos 0 = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x = \tan x \qquad f'(0) = \tan 0 = 0$$

$$f''(x) = see^2 x \qquad \therefore f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = 2 \sec x \sec x \tan x = 2 \sec^2 \tan x$$

$$= 2 \tan x (1 + \tan^2 x) = 2 \tan x + \tan^3 x$$

$$\therefore f'''(0) = 0$$

$$f^4(x) = 2 \sec^2 x + 6 \tan^2 x \sec^2 x$$

$$= 2 \sec^2 x (1 + 3 \tan^2 x) \qquad f^{(4)}(0) = 2$$

وعليه يكون :

$$\ln \cos x = \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!}(2) + \ldots = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \ldots\ldots$$

مثال ٩ ـ ١ ـ ٧ :

اكتب الحدين الأولين فى مفكوك ماكلورين للدالة $y = \arctan x$

الحـل :

تحسب قيم الدالة وتفاضلاتها عند نقط $x = 0$

$$f(x) = \arctan x \qquad \therefore \quad f(0) = \arctan(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = (1 + x^2)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -2x(1 + x^2)^{-2} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -2(1 + x^2)^{-2} + 2(+2x)^2(1 + x^2)^{-3}$$

$$f'''(0) = 2$$

وعليه نجد ان المفكوك يمكن كتابة حدوده الأولى كما يلى :

$$\arctan x = \frac{x}{1\,!} + \frac{x^3}{3\,!}(-2) + \dots = x - \frac{x^3}{3} + \dots$$

مثال ٩ ـ ١ ـ ٨ :

اكتب الحدود الأربع الأولى من مفكوك ماكلورين للدالة

$$y = \ln(1 + x)$$

الحـل :

$$(x) = \ln(1 + x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1 + x)} = (1 + x)^{-1} \qquad f'(0) = 1.$$

$$f''(x) = (-1)(1 + x)^{-2} \qquad f''(0) = (-1)$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1 + x)^{-3}$$

$$f'''(0) = (-1)(-2) = 2\,!$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1 + x)^{-4}$$

$$f^{(4)}(0) = (-1)(-2)(-3) = -(3\,!)$$

$$f^{(5)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)(1 + x)^{-5}$$

$$f^{(5)}(0) = 4\,!$$

ومن ثم نجد أن :

$$\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2\,!}(-1) + \frac{x^3}{2\,!}(2\,!)$$

$$+ \frac{x^4}{4\,!}(-1)(3\,!) + \frac{x^5}{5\,!}(4\,!) + \ldots\ldots$$

$$\therefore\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

٩ — ٢ تطبيقات على مفكوك تايلور :

يمكننا أن نطبق مفكوك تايلور فى حل بعض مسائل النهايات التى فى الصـــورة $(0/0)$ أو التى يمكن تحويلها الى هذه الصورة . وتطبيق هذه الطريقة يعرف بقاعدة لوبيتال

١٢ — ٢ — ١ قاعدة لوبيتال للنهايات :

تنص هذه القاعدة على انه اذا كانت $f(a) = 0\ ,\ g(a) = 0$

وكانت $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة فان

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وتنطبق نفس القاعدة على النهاية اليمنى والنهاية اليسرى .

ويمكن برهنة هذه القاعدة كما يلى :

بكتابة مفكوك تايلور لكل من $f(x)\ ,\ g(x)$ قريبا من النقطة $x = a$ فنجد :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1\,!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!}f''(a) + \ldots.$$

$$= \frac{(x-a)}{1\,!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!}f''(a) + \ldots\ldots$$

$$g(x) = g(a) + \frac{(x - a)}{1\,!} g'(a) + \frac{(x - a)^2}{2\,!} g''(a) + \ldots$$

$$= \frac{(x - a)}{1\,!} g'(a) + \frac{(x - a)}{2\,!} g''(a) + \ldots\ldots$$

وذلك باستخدام $f(a) = 0 , g(a) = 0$. ومن ثم نجد :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a}$$

$$\frac{(x - a) f'(a) + (x - a)^2/2\,!\, f''(a) + \ldots}{(x - a) g'(a) + (x - a)^2/2\,!\, g''(a) + \ldots} \rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال ٩ ــ ٢ ــ ١ :

استخدم قاعدة لوبيتال لحساب النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

الحـل :

حيث أن $\frac{\sin x}{x}$ من الصورة (0/0) فيمكننا اسـتخدام قاعدة لوبيتال لنحصل على :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

وهذه هى النتيجة المعهودة .

مثال ٩ ــ ٢ ــ ٢ :

احسب قيمة النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

الحـل :

بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد ان :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{+ \sin x}{2x}$$

فنطبقها مرة اخرى لنحصل على :

$$\lim = \lim_{x = 0} \frac{\cos x}{2} = \tfrac{1}{2} .$$

ملحوظة (١) :

اذا كانت $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ كمية غير معينة فعلينا ان نطبق قاعدة لوبيتال مرة اخرى .

ملحوظة (٢) :

نلاحظ اننا قد طبقنا قاعدة لوبيتال فى حالة (0/0) الا انه يمكننا تطبيق القاعدة فى حالة ما اذا كانت الصورة غير المعينة هى(∞/∞)

مثال ٩ ــ ٢ ــ ٣ :

احسب قيمة النهاية $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$

الحـل :

بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد ان :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} \to \infty$$

مثال ٩ ــ ٢ ــ ٤ :

احسب قيمة النهاية $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 5x + 3}{3x^2 - 5}$

الحـــل :

بتطبيق القاعدة مرتين نجد أن :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 5x + 3}{3x^2 - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{8x + 5}{6x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

ملحوظة (٣) :

يمكننا تحويل الكميات غير المعينة التى فى الصورة $\infty - \infty$ أو (0^0) أو (1^∞) أو (∞^0) الى صيغ يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال عليها وذلك بعد استخدام قواعد النهايات التى درسناها فى الفصل الثالث وخاصـــة باستخدام

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)).$$

مثال ٩ ـ ٢ ـ ٥ :

احسب قيمة النهاية $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

الحـــل :

هذه النهاية فى صورة النهاية لكمية غير معينة $(\infty - \infty)$ ونحاول تحويلها الى احدى الصيغتين السابقتين وذلك كما يلى :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

وبذلك اصبحت الكمية غير المعينة هى $(0/0)$. وبتطبيق قاعـــدة لوبيتال نحصل على :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{+\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{+\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

فيما يلى من امثلة نتعرض لنهايات الكميات غير المعينة التى على الصور (0^0) ، (1^∞) ، (∞^0) . ولحل مثل هذه الحالات نأخذ اللوغاريتم أولا ثم نحسب نهاية هذا اللوغاريتم ثم نطبق القاعدة التى تنص على أن :

$$\lim_{x \to a} (\ln y) = \ln \left(\lim_{x \to a} y \right)$$

مثال ٩ ــ ٢ ــ ٦

كمثال على نهاية الكمية المعينة (0^0) . احسب قيمة النهاية

$$\lim_{h \to 0^+} (h)^{\sin h}$$

الحـــل :

اذا كتبنا $y = (h)^{\sin h}$ فان $\ln y = (\sin h)(\ln h)$

ويمكننا كتابتها فى الصورة

$$\ln y = \frac{\ln h}{\csc h}$$

وهذه فى الصورة $\frac{-\infty}{\infty}$ فبتطبيق قاعدة لوبيتال نجد :

$$\lim_{h \to 0^+} \ln y = \lim_{h \to 0^+} \frac{1/h}{\csc h \cot h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sin h \tan h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(\sin h)(\sec^2 h) + (\cos h)(\tan h)}{1} = 0$$

ولكن حيث أن :

$$\lim_{h \to 0^+} (\ln y) = \ln (\lim_{h \to 0^+} y) = 0$$

$$\therefore \lim_{h \to 0^+} y = e^0 = 1$$

مثال ٩ ـ ٢ ـ ٧

وكمثال آخر اوجد :

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

الحل :

مرة اخرى نكتب $y = x^x$

$$\therefore \ln y = x \ln x = (\ln x)/(1/x)$$

وهذه مرة اخرى الصورة $(-\infty/\infty)$ فبتطبيق قاعدة لوبيتال نجد :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

وحيث ان :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \ln (\lim_{x \to 0^+} y) = 0$$

فلذا يكون $\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1.$

مثال ٩ ـ ٢ ـ ٨

كمثال على صورة (1^∞)، احسب قيمة النهاية $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$

الحل :

نستخدم $y = (1 + x)^{1/x}$ ونأخذ اللوغاريتم فنجد :

$$\ln y = (1/x) \ln (1 + x)$$

فاصبحت الصيغة فى الصورة 0/0 . فنطبق قاعدة لوبيتال لنجد :

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1.$$

وحيث أن :

$$\lim_{x \to 0} (\ln y) = \ln (\lim_{x \to 0} y) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} y = e^1 = e \qquad \therefore \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

وهـذه النتيجـــة قد اثبتناها بطرق اخرى من قبل (انظر باب النهايات)

وكمثال على حساب نهايات كميات غير معينة على الصـــورة (∞^0) نتعرض للمثال التالى :

مثال ٩ ـ ٢ ـ ٩

احسب قيمة النهاية $\lim_{x \to \infty} (x)^{2/x}$

الحـل :

بوضع $y = x^{(2/x)}$ وبأخذ اللوغاريتم نجد :

$$\ln y = (2/x)(\ln x)$$

ثم نحسب النهاية فنجد بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \to \infty} (\ln y) = \lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2/x}{1} = 0$$

ثم بتطبيق $\ln (\lim_{x \to \infty} y) = \lim_{x \to \infty} (\ln y) = 0$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} y = e^0 = 1 \qquad \therefore \lim_{x \to \infty} (x)^{2/x} = 1.$$

تمـــارين

١ ـ اكتب الحدود الأربع الأولى من مفكوك الدوال الآتية قريبا من النقطة $x = a$

1) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ $\quad a = 2.$

2) $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$ $\quad a = -1$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad a = 1.$

4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 - x^2})$ $\quad a = 0.$

5) $f(x) = \tan x$ $\quad a = 0.$

6) $f(x) = \arcsin x$ $\quad a = 0.$

7) $f(x) = \ln(1 - x)$ $\quad a = 0.$

8) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\right)$ $\quad a = 0.$

9) $f(x) = \tanh x$ $\quad a = 0.$

10) $f(x) = \operatorname{artanh} x$ $\quad a = 0.$

٢ ـ احسب قيم النهايات الآتية :

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$$

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \sin x}{1 - e^{-x^2}}$$

3) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cot x}{x}\right)$$

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$$

5) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}$$

6) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - \sin x^2}{x^4}$$

7) $$\lim_{x \to \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan 3x$$

8) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$$

9) $$\lim_{x \to \infty} x \sin (1/x)$$

10) $$\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)$$

11) $$\lim_{x \to 1+} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x - 1}}\right)$$

12) $$\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{3/x}$$

13) $$\lim_{x \to \infty} (x + e^x)^{(2/x)}$$

14) $$\lim_{x \to 0+} (x + \sin x)^{\tan x}$$

15) $$\lim_{x \to 1-} (x)^{1/1-x}$$

16 $$\lim_{x \to 0+} (\cos \sqrt{x})^{1/x}$$

17) $$\lim_{x \to \infty} (x)^{1/x}$$

18) $$\lim_{x \to \infty} (\cosh x)^{1/x}$$

19) $$\lim_{x \to 0+} (\sin x)^{(\sin x) - x}$$

20) $$\lim_{x \to \infty} (1 + 5x)^{e^{-x}}$$

21) $\lim_{x \to \infty} (\cos 1/x)^x$

22) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2^x}$.

23) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{4^x}$

24) $\lim_{x \to 0+} \frac{\ln (\tan x)}{\ln (\sin x)}$.

25) $\lim_{x \to 0} x^{10} e^{-1/x^2}$

26) $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi^+} \frac{\ln \cos x}{\tan x}$

الباب العاشر

طرق التكامل

METHODS OF INTEGRATION

سنتعرض فى هذا الباب لطرق نستنتج بها تكاملات لم يرد ذكرها فى الصيغ السابقة وتتركز هذه الطرق أساسا فى التحويل الى التكاملات التى سبق معرفتها ويحتوى هذا الباب على جميع التكاملات الأولية ــ ثم طريقة التعويض ويلى ذلك تكاملات الجذور التربيعية لكثيرة حدود من الدرجة الثانية واستخدام الكسور الجزئية فى تبسيط التكاملات للدوال الكسرية ثم التكامل بالتجزىء وتطبيق هذا التكامل فى طريقة الاختزال وكذلك تكاملات الدوال القياسية (الكسرية) التى تحتوى الدوال المثلثية والزائدية .

١٠ ــ ١ : التكاملات الأولية :

وهذه المجموعة من التكاملات التى تعاملنا معها فيما سبق وسوف نجملها فى الجدول الآتى(*) :

(*) فى هذا الجدول لم ترد الدوال الزائدة لذا يرجى الرجوع الى الباب الثامن .

جدول التكاملات القياسية

التفاضلات	التكاملات
1. $du = \frac{du}{dx}\,dx$	1. $\int du = u + C$
2. $d(au) = a\,du$	2. $\int a\,du = a\int du$
3. $d(u+v) = du + dv$	3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$
4. $d(u^n) = nu^{n-1}\,du$	4. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
5. $d(\ln u) = \frac{du}{u}$	5. $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$
6. (a) $d(e^u) = e^u\,du$	6. (a) $\int e^u\,du = e^u + C$
(b) $d(a^u) = a^u \ln a\,du$	(b) $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
7. $d(\sin u) = \cos u\,du$	7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
8. $d(\cos u) = -\sin u\,du$	8. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
9. $d(\tan u) = \sec^2 u\,du$	9. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
10. $d(\cot u) = -\csc^2 u\,du$	10. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
11. $d(\sec u) = \sec u \tan u\,du$	11. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
12. $d(\csc u) = -\csc u \cot u\,du$	12. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
13. $d(\sin^{-1} u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ 14. $d(\cos^{-1} u) = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$	13. and 14. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} u + C \\ -\cos^{-1} u + C' \end{cases}$
15. $d(\tan^{-1} u) = \frac{du}{1+u^2}$ 16. $d(\cot^{-1} u) = \frac{-du}{1+u^2}$	15. and 16. $\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \tan^{-1} u + C \\ -\cot^{-1} u + C' \end{cases}$
17. $d(\sec^{-1} u) = \frac{du}{\|u\|\sqrt{u^2-1}}$ 18. $d(\csc^{-1} u) = \frac{-du}{\|u\|\sqrt{u^2-1}}$	17. and 18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} \sec^{-1} \|u\| + C \\ -\csc^{-1} \|u\| + C \end{cases}$

١٠ ـ ١ ـ ١ امثلة :

مثال (١) :

اوجد التكاملات الآتية :

1) $\int \sqrt{2x+3}\, dx$ 2) $\int \frac{dx}{(2x-7)^2}$

3) $\int \frac{e^{2x}\, dx}{1+e^{2x}}$

4) $\int (1+\cosh x)^3 \sinh x\, dx$

الحـل :

(i) نضع $u = 2x + 3$ ومنها فان $du = 2\, dx$

$$\therefore \int \sqrt{2x+3}\, dx = \int \sqrt{u} \cdot \tfrac{1}{2}\, du = \tfrac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \qquad = \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2} + C$$

(ii) بوضع $u = 2x - 7$ فان $du = 2\, dx$.

$$\therefore \int \frac{1}{(2x-7)^2}\, dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{2} = \tfrac{1}{2} \int u^{-2}\, du$$

$$= -\tfrac{1}{2} u^{-1} + C = -\tfrac{1}{2}(2x-7)^{-1} + C$$

(iii) بوضع $u = 1 + e^{2x}$ $du = e^{2x} \cdot 2\, dx$

$$\therefore \int \frac{e^{2x}\, dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{\frac{1}{2}\, du}{u} = \tfrac{1}{2} \ln u + C$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln (1 + e^{2x}) + C$$

(iv) بوضع $u = 1 + \cosh x$ فان $du = \sinh x\, dx$

$$\therefore \int (1+\cosh x)^3 \sinh x\, dx = \int u^3\, du = \tfrac{1}{4} u^4 + C$$

$$= \tfrac{1}{4}(1+\cosh x)^4 + C$$

مثال (٢) :

اوجد قيم التكاملات الآتية :

1) $\int \sec^3 x \tan x \, dx$ 2) $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx$

3) $\int x^2 \sinh x^3 \, dx$ 4) $\int (t + 1) e^{(t^2 + 2t + 1)} \, dt$

الحـل :

(١) بالنسبة الى الدالة $\sec^3 x \tan x$ يمكن كتابتها على الصورة
$\sec^2 x \, (\sec x \tan x)$

ومن الواضح أن :

$$d \sec x = \sec x \tan x \, dx$$

$$\therefore \int \sec^3 \tan x \, dx = \int \sec^2 x \, (\sec x \tan x \, dx)$$

$$= \int \sec^2 x \, d \sec x = \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

٢ ـ ومن الواضح أن : $\frac{1}{x} dx = d \, (\ln x)$

$$\therefore \int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \int \ln x \, d(\ln x)$$

$$= \tfrac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

٣ ـ من الممكن كتابة $x^2 \, dx = d \frac{x^3}{3}$

$$\therefore \int x^2 \sinh x^3 \, dx = \frac{1}{3} \int \sinh x^3 \, dx^3 = \frac{1}{3} \cosh x^3 + C$$

٤ ـ حيث أن :

$$d \, (t^2 + 2t + 1) = (2t + 2) \, dt = 2 \, (t + 1) \, dt$$

$$\therefore \int (t+1)\, e^{(t^2+2t+1)}\, dt = \tfrac{1}{2} \int e^{(t^2+2t+1)}\, d\,(t^2+2t+1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, e^{(t^2+2t+1)} + C$$

١٠ ـ ٢ : طريقة التعويض Substitution:

هذه الطريقة هى الصيغة التكاملية لصـــيغة تفاضل دالة الدالة .

فمثلا كما نعلم أن العنصر التفاضلى $du = \dfrac{du}{dx} \cdot dx$ فان المطلوب فى الصيغة التكاملية هو البحث عن هذا العنصر التفاضلى du وعليه فيكون المطلوب فى طريقة التعويض هو أن نحول التكاملات التى نواجههـــا الى صورة من الصور القياسية الموجودة فى الجدول فى البند السابق ولعل من الأمثلة (١٠ ـ ١ ـ ١) التى مرت تطبيق مبسط لهذه الطريقة . وفيما يلى من فقرات سنتعرض الى تعويض يســـتعمل لتحويل التكاملات الى صورة معروفة وهى $\int u^n\, du$ حيث ان « n » عدد حقيقى $\neq (-1)$

١٠ ـ ٢ ـ ١ : التكاملات التى يمكن تحويلها الى الصيغة $\int u^n\, du$ هذه الأنواع من التكاملات يمكن جملها فيما يلى :

١٠ ـ ٢ ـ ١ ـ ١ :

التكاملات التى تحتوى الدوال المثلثية والزائدية على الصـــورة

$\int (\sin ax)^n \cos ax\, dx$, $\int (\cos ax)^n \sin ax\, dx$, $\int (\sinh ax)^n \cdot \cosh ax\, dx$, $\int (\cosh ax)^n \sinh ax\, dx$, $\int (\tan ax)^n \sec^2 ax\, dx$, $\int (\tanh ax)^n \operatorname{sech}^2 ax\, dx$

فى هذه المجموعة من التكاملات نستخدم العنصر التفاضلى :

$d(\sin ax) = a \cos ax\, dx$, $d(\cos ax) = -a \sin ax\, dx$

$d(\sinh ax) = a \cosh ax\, dx$, $d(\cosh ax) = a \sinh ax\, dx$

$d(\tan ax) = a \sec^2 ax\, dx$, $d(\tanh ax) = a \operatorname{sech}^2 ax\, dx$

ومن ثم تتحول هذه المجموعات من التكاملات الى الصورة

$$\pm \frac{1}{a} \int u^n\, du$$

حيث u هى الدالة داخل القوس فى العنصر التفاضلى السابق .

مثال (١) :

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1) $\int \sin^4 3x \cos 3x \, dx$

2) $\int \cosh^{7/3} (3x + 1) \sinh (3x + 1) \, dx$

3) $\int \tan^7 5x \sec^2 5x \, dx$

4) $\int \tanh^{3/4} 7x \, \text{sech}^2 7x \, dx$

الحـل :

(i) بوضع $u = \sin 3x$ فان $du = 3 \cos 3x \, dx$

$$\frac{1}{3} du = \cos 3x \, dx ,$$

$$\therefore \int \sin^4 3x \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int u^4 \, du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{1}{15} (\sin 3x)^5 + C$$

(ii) بوضع $u = \cosh (3x + 1)$ فان $du = 3 \sinh (3x + 1) \, dx$

$$\frac{1}{3} du = \sinh (3x + 1) \, dx ,$$

$$\therefore \int \cosh^{7/3} (3x + 1) \sinh (3x + 1) \, dx = \frac{1}{3} \int u^{7/3} \, du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{10/3}}{10/3} + C = \frac{1}{10} \cosh^{10/3} (3x + 1) + C$$

(iii) بوضع $u = \tan 5x$ فان $du = 5 \sec^2 5x\, dx$

$$\frac{1}{5} du = \sec^2 5x\, dx .$$

$$\therefore \int \tan^7 5x \sec^2 5x\, dx = \frac{1}{5} \int u^7\, du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^8}{8} + C$$

$$= \frac{1}{40} \tan^8 5x + C$$

(iv) بالمثل يمكننا مباشرة التعامل مع التكامل

$$\int \tanh^{3/4} 7x \,.\, \operatorname{sech}^2 7x\, dx = \frac{1}{7}\int u^{3/4}\, du = \frac{1}{7} \cdot \frac{u^{7/4}}{7/4} + C$$

$$= \frac{4}{49} \tanh^{7/4} 7x + C$$

١٠ ـ ٢ ـ ٢ : تكاملات يمكن تحويلها الى صيغ قريبة وهي التكاملات للدوال

$(\sin x)^{2n+1}$, $(\cos x)^{2n+1}$, $(\sinh x)^{2n+1}$, $(\cosh x)^{2n+1}$

حيث « n » عدد صحيح موجب . فى مثل هذه الحالات نفرد احدى القوى ونستخدمها فى العنصر التفاضلى ثم نســـتخدم العلاقات الجبرية لهذه الدوال ـ فمثلا :

$$\int (\sin x)^{2n+1} dx = \int (\sin x)^{2n} \,.\, \sin x\, dx = -\int (\sin^2 x)^n\, d \cos x$$

$$= -\int (1 - \cos^2 x)^n\, d \cos x = -\int (1 - u^2)^n\, du$$

ونستخدم نظرية ذات الحدين ثم نكامل حدا حدا .

اما فى حالة $(\cosh x)^{2n+1} dx$ فاننا نحولها الى :

$$\int (\cosh x)^{2n} \cosh x\, dx = \int (\cosh^2 x)^n\, d \sinh x$$

$$= \int (1 + \sinh^2 x)^n\, d \sinh x = \int (1 + u^2)^n\, du$$

ثم نستخدم نظرية ذات الحدين ثم نكامل حدا حدا .

١٠ ـ ٢ ـ ٢ ـ ١ أمثلة :

مثال (١) :

أوجد التكاملات الآتية :

1) $\int \sin^5 x\, dx$ 2) $\int \sinh^3 x\, dx$

الحـل :

(١) نضع $u = \cos x$ ، ومنها $du = -\sin x\, dx$

$$\therefore \int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x . \sin x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2\, d(-\cos x)$$

$$= -\int (1 - u^2)^2\, du = -\int (1 - 2u^2 + u^4)\, du$$

$$= -[u - \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5] + C$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

(ii) $$\int \sinh^3 x\, dx = \int \sinh^2 x . \sinh x\, dx = \int (\cosh^2 x - 1)\, d \cosh x$$

$$= \int (u^2 - 1)\, du = \frac{1}{3} u^3 - u + C$$

$$= \frac{1}{3} \cosh^3 x - \cosh x + C$$

وذلك بوضع $u = \cosh x$ واستخدام $du = \sinh x\, dx$

مثال (٢) :

1) $\int \cos^3 4x\, dx$ 2) $\int \cosh^5 3x\, dx$

الحـل :

(i) نضع $u = \sin 4x$ ومنها $du = 4 \cos 4x\, dx$

$$\therefore \int \cos^3 4x\, dx = \int (1 - \sin^2 4x) \cos 4x\, dx = \int (1 - u^2) \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4} (u - \frac{1}{3} u^3) + C$$

$$= \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin^3 4x + C$$

(ii) نضع $u = \sinh 3x$ ومنها $du = 3 \cosh 3x\, dx$

$$\therefore \int \cosh^5 3x\, dx = \int \cosh^4 3x \,.\, \cosh 3x\, dx =$$

$$= \int (1 + \sinh^2 3x)^2 \cosh 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int (1 + u^2)^2\, du$$

$$= \frac{1}{3} \int (1 + 2u^2 + u^4)\, du$$

$$= \frac{1}{3} [u + \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5] + C$$

$$= \frac{1}{3} \sinh 3x + \frac{2}{9} \sinh^3 3x + \frac{1}{15} \sinh^5 3x + C$$

١ ـ ٢ ـ ٣ تكاملات تحتوى دوال الظل وظل التمام المثلثى والزائدى

$$1) \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

وواضح اننا لو وضعنا $u = \cos x$ فيكون $du = -\sin x\, dx$

$$\therefore \int \tan x \, dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln u + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

(٢) بينما فى تكامل ظل التمام المثلثى فاننا نرى ذلك فيما يلى :

يوضع $u = \sin x$ فان $dx = \cos x \, dx$

$$2) \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x}$$

$$= \int \frac{dx}{u} = \ln u + C = \ln|\sin x| + C$$

أما بالنسبة لتكاملات الدوال الزائدية فيمكن استنتاج كالآتى :

$$3) \int \tanh x \, dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$4) \int \coth x \, dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx = \ln|\sinh x| + C$$

١٠ ـ ٢,ـ ٤ تكاملات تحتوى قوى زوجية موجبة لدوال قاطع وقاطع التمام المثلثى والزائدى وهى تكاملات فى الصورة :

$$\int \sec^{2n} x \, dx , \int \operatorname{cosec}^{2n} x \, dx , \int \operatorname{sech}^{2n} x \, dx , \int \operatorname{cosech}^{2n} x \, dx$$

وفى هذه الحالات نأخذ

$$\operatorname{csch}^2 x \, dx , \operatorname{sech}^2 x \, dx , \csc^2 x \, dx , \sec^2 x \, dx$$

وهى عبارة عن المعاملات التفاضلية

$$d(-\coth x) , d(\tanh x) , d(-\cot x) , d(\tan x)$$

على الترتيب .

ونستخدم العلاقات الجبرية بين $\tan^2 x , \sec^2 x$ وباقى العلاقات ونستخدم بعد ذلك نظرية الحدين كما فى المثال التالى :

مثـال :

1) $\int \sec^4 x\, dx$ 2) $\int \text{csch}^6 x\, dx$

الحـل :

1) $\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\, dx = \int (1 + \tan^2 x)\, d \tan x$

$$= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

---

2) $\int \text{csch}^6 x\, dx = \int \text{csch}^4 x \cdot \text{csch}^2 x\, dx$

ولكننا نعلم ان $-d\,(\coth x) = \text{csch}^2 x\, dx$ ومن ثم اذا وضعنا

$u = \coth x$ وباعتبار ان $\coth^2 x - 1 = \text{csch}^2 x$

$$\therefore \int \text{csch}^6 x\, dx = - \int (\coth^2 x - 1)^2\, d \coth x$$

$$= - \int (u^2 - 1)^2\, du = - \int (u^4 - 2 u^2 + 1)\, du$$

$$= - [\frac{u^5}{5} - \frac{2}{3} u^3 + u] + C$$

$$= - \frac{u^5}{5} + \frac{2}{3} u^3 - u + C$$

$$= - \frac{1}{5} \coth^5 x + \frac{2}{3} \coth^3 x - \coth x + C$$

١٠ ـ ٢ ـ ٥ تكاملات دوال القاطع وقاطع التمام المثلثى :

1) $\int \sec x\, dx$

فى الواقع يمكننا كتابة

$$\sec x = \sec x \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}$$

$$\therefore \sec x = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}$$

بوضع $u = \sec x + \tan x$ فيكون $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx$

$$\therefore \int \sec x\, dx = \int \frac{(\sec x \tan x + \sec^2 x)}{(\sec x + \tan x)}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + C$$

$$= \ln | \sec x + \tan x | + C$$

وبالمثل فان .

$$2) \quad \int \csc x\, dx = \int \frac{\csc x\, (\csc x - \cot x)}{(\csc x - \cot x)}\, dx$$

$$= \int \frac{(\csc^2 x - \csc x \cot x)}{(\csc x - \cot x)}\, dx$$

بوضع $u = \csc x - \cot x$ فان $du = (-\csc x \cot x + scs^2 x)\, dx$

$$\therefore \int \csc x\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$= \ln | \csc x - \cot x | + C$$

١٠ ــ ٢ ــ ٦ تعويضات للتحويل الى تكاملات معروفة :

وسنختار هذه التعويضات لتوجد تكاملات القاطع وقاطع التمـــام الزائدى بالذات .

مثـــال :

$$1) \quad \int \operatorname{sech} x\, dx = \int \frac{2\, dx}{e^x + e^{-x}}$$

بضرب البسط والمقام فى e^x

$$= \int \frac{2 e^x\, dx}{e^{2x} + 1}$$

وضع $u = e^x$ فان $du = e^x dx$

$$= 2\int \frac{du}{u^2 + 1} = 2 \tan^{-1} u + C = 2 \tan^{-1} (e^x) + C$$

2) $$\int \operatorname{csch} x \, dx = \int \frac{2\, dx}{e^x - e^{-x}} = 2 \int \frac{e^x\, dx}{e^{2x} - 1}$$

بوضع $u = e^x$ فان $du = e^x dx$

$$= 2\int \frac{du}{u^2 - 1} = -2 \int \frac{du}{1 - u^2}$$

$$= -2 \coth^{-1} u + C$$ ومن الملاحظ أن $u > 1$

$$= -\ln\left(\frac{1 + e^x}{e^x - 1}\right) + C = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) + C$$

١٠ ـ ٣ تكاملات تحتوى على

$$\sqrt{a^2 - u^2}\ , \quad \sqrt{a^2 + u^2}\ , \quad \sqrt{u^2 - a^2}$$

وفيما يلى سوف نعالج تكاملات فيها هذه الجذور

١٠ ـ ٣ ـ ١ التكاملات التى على الصورة :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

فى هذه الحالة يمكننا التعويض $x = a \cos t$ أو $x = a \sin t$

فمثلا لو أخذنا $x = a \sin t$ فيكون $dx = a \cos t\, dt$

وكذلك $$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos t}{a \cos t} dt =$$

$$= \int dt = t + C = \sin^{-1} (x/a) + C$$

١٠ ــ ٣ ــ ٢ تكاملات على الصورة :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

يمكننا أن نعوض $x = a \tan t$ أو $x = a \cot t$ أو $x = a \sinh \theta$

وأى من التعويضات السابقة يوصل لنفس النتيجة فمثلا لو اخذنا

$x = a \tan t$ فان $dx = a \sec^2 t \, dt$

وكذلك $a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tan^2 t = a^2 \sec^2 t$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a \sec^2 t \, dt}{a \sec t} =$$

$$= \int \sec t \, dt = \ln | \sec t + \tan t | + C$$

$$= \ln | x/a + \sqrt{1 + x^2/a^2} | + C$$

$$= \ln | x + \sqrt{a^2 + x^2} | + C'$$

٩ ــ ٣ ــ ٣ تكاملات على الصورة :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

فى هذه الحالة اما أن نأخذ :

$x = a \cosh \theta$ OR $x = a \operatorname{cosec} t$ OR $x = a \sec t$

فمثلا اذا اخذنا $x = a \cosh \theta$ فان $dx = a \sinh \theta \, d\theta$

وكذلك فان

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 - a^2} = a \sinh \theta$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^2}} = \int \frac{a \sinh \theta \, d \theta}{a \sinh \theta} =$$

$$= \int d\theta = \theta + C = \cosh^{-1} (x/a) + C$$

$$= \ln \left| x/a + \sqrt{x^2/a^2 - 1} \right| + C$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

١٠ – ٤ :

تكاملات تحتوى على $\sqrt{a x^2 + b x + c}$ وهناك نوعان من هذه التكاملات وهى :

١٠ – ٤ – ١ تكاملات على الصورة :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a x^2 + b x + c}}$$

وهــذه المجموعة من التكاملات تتحول الى التكاملات التى فى البند السابق وذلك باكمال المربع . فمن الواضح أن :

$$a x^2 + b x + c = a\,(x^2 + b/a\ x) + c$$

$$= a\,(x + b/2a)^2 + (c - b^2/4a)$$

ويتحول هــذا المقدار الى المقادير التى عالجناها فى البند السابق حسبما اشارة « a » , $c - b^2/4a.$

مثــال :

اوجد التكاملات الآتية :

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - ٤}}$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

الحــل :

1) $x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 9$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 - 9}}$$

فاذا وضعنا $x - 1 = 3 \cosh \theta$ فان $dx = 3 \sinh \theta \, d\theta$

وكذلك $\sqrt{(x-1)^2 - 9} = \sqrt{9 \cosh^2 \theta - 9} = 3 \sinh \theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}} = \int \frac{3 \sinh \theta}{3 \sinh \theta} d\theta$$

$$= \int d\theta = \theta + C = \cosh^{-1}(x-1)/3 + C$$

$$= \ln \left| (x-1) + \sqrt{(x-1)^2 - 9} \right| + C$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4(x^2 + x + 5/4)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 1/2)^2 + 1}}$$

فاذا وضعنا $x + \frac{1}{2} = \text{siinh}\, \theta$ فان $dx = \cosh \theta \, d\theta$

وكذلك $\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + 1} = \cosh \theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\cosh \theta}{\cosh \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int d\theta = \frac{1}{2} \theta + C$$

$$= \frac{1}{2} \sinh^{-1} (x + \tfrac{1}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left((x + \tfrac{1}{2}) + \sqrt{(x + \tfrac{1}{2})^2 + 1} \right) + C$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1) + C$$

١٠ ـ ٤ ـ ٢ تكاملات على الصور :

$$\int \frac{(A\, x + B)\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

هذه المجموعة من التكاملات نعالجها بأن نجعل المقدار $Ax + B$ ينقسم الى قسمين فالجزء الأول يتناسب مع تفاضل $ax^2 + bx + c$ بينما يكون الجزء الثانى مقدارا ثابتا . فالجزء الأول مقسوما على الجذر التربيعى عند تكاملها تصير متناسبة مع الجذر التربيعى نفسه . اما الجزء الثانى مقسوما على الحذر التربيعى فهو ما عالجناها فى الفقرة السابقة وسيكون ذلك هو محور المثال الآتى :

مثـال :

أوجد التكامل $\int \frac{(2x + 3)\, dx}{\sqrt{4\, x^2 + 4\, x + 5}}$

الحـل :

الدالة $4\, x^2 + 4\, x + 5$ تفاضلها بالنسبة الى « x » هو $8\, x + 4$ او $4\, (2x + 1)$ واننا نريد ان نجعل المقدار $2x + 3$ بضم الصورة $4\, (2\, x + 1)$ وذلك كما يلى :

$$2\, x + 3 = (2\, x + 1) + 2 = \frac{4}{4}\, (2x + 1) + 2$$

$$\therefore \int \frac{(2x + 3)\, dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{4\, (2x + 1)\, dx}{\sqrt{4\, x^2 + 4x + 5}} + \int \frac{2\, dx}{\sqrt{4\, x^2 + 4x + 5}}$$

وواضح ان التكامل الأول هو عبارة عن ضعف الجذر التربيعى بينما الثانى هو ضعف التكامل رقم (ii) من المثال فى بند . ١ ـ ٤ ـ ١ السابق .

$$\therefore \int \frac{(2x + 3)\, dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{x^2 + 4x + 5} + \ln \left| (x + \tfrac{1}{2}) + \sqrt{(x + \tfrac{1}{2})^2 + 1} \right| + C$$

١٠ ــ ٥ استخدام الكسور الجزئية لتبسيط التكامل :

Partial Fractions

لقد درس القارىء فى مبادىء الجبر كيف يجمع الكســـور ويوحد المقامات والمراد الآن هو أن نجرى العملية العكسية وهى أن نحل الدوال القياسية (الكسرية) الى كسور مقاماتها درجتها أقل من درجة الكسر الأصلى . وهذه العملية هى ماتسمى بالكسور الجزئية وهى مانتبعه عند اجراء تكامل الدوال القياسية (الكسرية) التى على الصورة $f(x)/g(x)$ حيث $f(x)$, $g(x)$ كثيرتى حدود فى « x » . ولن نســـتطرد فى النظريات المرتبطة بهذا الموضوع ولكن سنسرد فيما يلى اهم النقاط .

١٠ ــ ٥ ــ ١ اذا كانت $g(x)$ يمكن كتابتها فى الصورة :

$$g(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots\ldots (x - r_n)$$

وكان $f(x)/g(x)$ كسرا حقيقا فانه يمكن وضعه فى الصورة

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{(x - r_n)}$$

مثـــال :

بسط الكسر $\dfrac{2x + 1}{x^2 - 4}$ الى كسوره الجزئية

الحـــل :

يمكن تحليل المقام $x^2 - 4$ الى $(x + 2)\ (x - 2)$ ومن ثم يمكن كتابة الكسر كالآتى :

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 4} = \frac{2x + 1}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A_1}{(x - 2)} + \frac{A_2}{(x + 2)}$$

بضرب طرفى هذه المتطابقة فى المقدار $(x^2 - 4)$ نحصل على :

$$(2x + 1) = A_1 (x + 2) + A_2 (x - 2) \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

وهذه المتطابقة صحيحة لجميع قيم « x » . فعند وضع $x = 2$ فى طرفى المتطابقة (١) نحصل على :

$$5 = 4 A_1 + A_2 (2 - 2) \quad \therefore \quad A_1 = \frac{5}{4}$$

وعند وضع $x = -2$ فى طرفى المتطابقة (١)

$$(-4 + 1) = A_1 (-2 + 2) + A_2 (-2 - 2)$$

$$\therefore \quad -3 = -4 A_2 \qquad \therefore \quad A_2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{2x + 1}{x^2 - 4} = \frac{5/4}{x - 2} + \frac{3/4}{x + 2}$$

١٠ ـ ٥ ـ ٢ :

اذا كانت الدالة $g(x)$ يمكن كتابتها على الصورة :

$$g(x) = (x - r_1)^{m_1} (x - r_2)^{m_2} \ldots\ldots (x - r_n)^{m_n}$$

وهذا يعنى أن العامل $(x - r_1)$ مكرر m_1 من المرات ، العامل $(x - r_2)$ مكرر m_2 من المرات وهكذا فى هذه الحالة يكتب الكسر $f(x)/g(x)$ فى الصورة

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_1)^2} + \frac{A_3}{(x - r_1)^3} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{A_{m1}}{(x - r_1)^{m_1}} + \frac{B_1}{(x - r_2)} + \frac{B_2}{(x - r_2)^2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{B_{m2}}{(x - r_2)^{m_2}} + \ldots\ldots$$

اى ان العامل $(x - r_1)$ يتكرر m_1 من المرات بجميع القوى من ١ الى m_1 وهكذا النسبة للعوامل المكررة الأخرى .

مثـال :

بسط الكسر الآتى الى كسوره الجزئية

$$\frac{3x - 1}{(x^2 - 1)\ (x - 1)^2}$$

الحـل :

المقام $(x^2 - 1)\ (x - 1)^2$ يمكن كتابته فى الصورة $(x - 1)^3\ (x + 1)$

ومن ثم يتحلل الكسر الى كسوره الجزئية كالتالى :

$$\frac{3\ x - 1}{(x - 1)^3\ (x + 1)} = \frac{A_1}{(x - 1)} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{(x - 1)^3} + \frac{B}{(x + 1)}$$

بالضرب فى $(x - 1)^3\ (x + 1)$ فنحصل على :

$$3\ x - 1 = A_1\ (x + 1)\ (x - 1)^2 + A_2\ (x + 1)\ (x - 1) + A_3\ (x + 1) + B\ (x - 1)^3 \quad (1)$$

وهذه المتطابقة (١) صحيحة لجميع قيم « x » وعند وضع $x = 1$ فى طرفى المتطابقة (١)

$$\therefore\ 2 = 2\ A_3 \qquad \therefore\ A_3 = 1 \qquad (2)$$

وعند وضع $x = -1$ نحصل على :

$$-4 = B\ (-2)^3 \qquad \therefore\ -4 = -8\ B \qquad \therefore\ B = \tfrac{1}{2} \qquad (3)$$

وبوضع $x = 0$ فى المتطابقة (١) نحصل على :

وباستخدام (٢ ، ٣) نجد :

$$-1 = A_1 - A_2 + A_3 - B$$

$$\therefore\ -1 = A_1 - A_2 + 1 - \tfrac{1}{2} \quad \therefore\ A_1 - A_2 = -\frac{3}{2} \qquad (4)$$

وباخذ معامل « x^3 » فى طرفى المتطابقة (١)

$$\therefore\ 0 = A_1 + B \qquad \therefore\ A_1 = -B = -\tfrac{1}{2}$$

بالتعويض فى (٤)

$$\therefore\ -\frac{1}{2} - A_2 = -\frac{3}{2} \qquad \therefore\ A_2 = 1$$

$$\therefore\ \frac{3x-1}{(x-1)^3 (x+1)} = \frac{-1/2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1/2}{(x+1)}$$

١٠ ــ ٥ ــ ٣ اذا امكن كتابة الدالة $g(x)$ فى الصورة :

$$g(x) = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \ldots\ldots$$

حيث كل عامل من هذه العوامل من الدرجة الثانية لايمكن تحليله الى عوامل حقيقية من الدرجة الأولى فى هذه الحالة يتحلل الكسر $f(x)/g(x)$ الى الكسور الجزئية

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{A_2 x + B_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \ldots\ldots$$

وواضح أن كل كسر من هذه الكسور الجزئية كسر حقيقى اذ أن درجة البسط اقل من درجة المقام .

مثــال :

حلل الكسر التالى الى كسوره الجزئية $\dfrac{x+2}{x^3-1}$

الحــل :

نحلل المقدار $(x^3 - 1)$ الى عوامله اى $(x-1)(x^2+x+1)$

وواضح ان المقدار $(x^2 + x + 1)$ لايمكن تحليله

$$\therefore \frac{x+2}{x^3-1} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$$

بالضرب فى المقدار $x^3 - 1$ نحصل على :

$$\therefore x+2 = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+x+1) \qquad (1)$$

$\therefore$ فى المتطابقة (١) نضع $x = 1$

$$3 = 3C \qquad \therefore C = 1 \qquad (2)$$

وبوضع $x = 0$ فى طرف (1)

$$\therefore 2 = -B + C = -B + 1 \qquad \therefore B = -1$$

وبمساواة معاملات « x^2 » فى طرف المتطابقة (١) $\therefore 0 = A + C$

فمن (٢) نجد : $\therefore A = -1 \qquad \therefore 0 = A + 1$

$$\therefore \frac{x+2}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{(x-1)}{(x^2+x+1)}$$

١٠ ـ ٥ ـ ٤ :

اذا تكرر أحد العوامل $(ax^2 + bx + C)$ عدة مرات عددها« n ».
فى $g(x)$ فعند التحليل الى الكسور الجزئية نكرر $(ax^2 + bx + C)$
« n » من المرات من القوى ١ الى « n »

مثـال :

حلل الكسر الآتى الى أبسط كسوره الجزئية

$$\frac{x^5 + 2x^3 + x^2 - x + 1}{(x^2+1)^2 (x-1)^2}$$

الحـل :

$$\frac{x^5 + 2x^3 + x^2 - x + 1}{(x-1)^2 (x^2+1)^2}$$

$$= \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C_1 x + D_1}{(x^2+1)} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2+1)^2}$$

بالضرب فى مقام الطرف الأيسر

$$\therefore \quad x^5 + 2x^3 + x^2 - x + 1 = A(x-1)(x^2+1)^2$$
$$+ B(x^2+1)^2 + (C_1 x + D_1)(x-1)^2(x^2+1)$$
$$+ (C_2 x + D_2)(x-1)^2 \qquad (1)$$

بوضع $x = 1$ نحصل على

$$1 + 2 + 1 - 1 + 1 = B(1+1)^2$$

$\therefore \quad 4 = 4B \qquad \therefore \quad B = 1$

بأخذ معاملات x^5 (1) $\therefore \quad 1 = A + C_1$

بأخذ معاملات x^4 (2) $\therefore \quad 0 = -A + B - 2C_1 + D_1$

بأخذ معاملات x^3 (3) $\therefore \quad 2 = 2A - C_1 - 2D_1 + C_2$

بأخذ معاملات x (4) $\therefore \quad -1 = A + C_1 - 2D_1 + C_2 - 2D_2$

بأخذ معاملات x^0 (الحد المطلق) (5) $\therefore \quad 1 = -A + B + D_1 + D_2$

وبحل هذه المعادلات نحصل على :

$$A = 1,\ B = 1,\ C_1 = 0,\ D_1 = 0,\ C_2 = 0,\ D_2 = 1$$

وبعد أن تعرضنا لهذه العملية فيمكننا بعد ذلك أن نجرى عمليات التكامل بعد ذلك باستعمال النتائج التى حصلنا عليها قبل ذلك .

ملحوظة هامة :

قبل تجزىء اى كسر الى كسوره الجزئية يجب أن نتأكد من أن درجة البسط اقل من درجة المقام والا فتجرى عملية القسمة المطولة حتى تصير درجة البسط اقل من درجة المقام .

١٠ ــ ٥ ــ ٥ امثلة :

أوجد تكاملات الدوال الآتية بالنسبة الى x :

1) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}$ 2) $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x-1)^3}$

$$3)\ \frac{x + 2}{x^3 - 1} \qquad 4)\ \frac{x^5 + 2x^3 + x^2 - x + 1}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)^2}$$

الحـل :

هذه المجموعة من الكسور قمنا بتبسيطها فى المجموعة السابقة من الأمثلة فى هذا البند سنستخدم النتائج السابقة للحصول على التكاملات

$$1)\ \int \frac{2x + 1}{x^2 - 4}\, dx = \frac{5}{4} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x + 2}$$

$$= \frac{5}{4} \ln |x - 2| + \frac{3}{4} \ln |x + 2| + C$$

$$2)\ \int \frac{(3x - 1)\, dx}{(x - 1)^3 (x + 1)} = -1/2 \int \frac{dx}{(x - 1)} +$$

$$+ \int \frac{dx}{(x - 1)^2} + \int \frac{dx}{(x - 1)^3} + 1/2 \int \frac{dx}{(x + 1)}$$

وذلك ماحصلنا عليه فيما سبق

$$= -\tfrac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{(x - 1)} - \frac{1}{2 (x - 1)^2}$$

$$+ \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C$$

$$3)\ \int \frac{(x + 2)\, dx}{(x^3 - 1)} = \int \frac{dx}{(x - 1)} - \int \frac{(x + 1)\, dx}{(x^2 + x + 1)}$$

والتكامل الأول معروف اما التكامل الثانى فنعالجه فيما يلى :

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+3/4}$$

فى التكامل الأول جعلنا البسط عبارة عن تفاضل المقام وفى الثانى اكملنا المربع فى المقام

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right) + C$$

وفى الجزء الثانى من التكامل السابق استخدمنا الصورة القياسية للتكامل التى صيغتها

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(u/a)$$

$$\therefore \int \frac{x+2}{x^3-1}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

4) $$\frac{x^5+2x^3+x^2-x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

وهو ماوجدناه فى البند السابق فعند اجراء التكامل نحصل على :

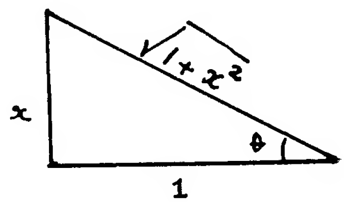
$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)^2 (X - 1)^2} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{(x - 1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

التكاملان الأولان يمكن اجراؤهما مباشرة اما التكامل الثالث فيجرى كالتالى :

نضع $x = \tan\theta$ فيكون $dx = \sec^2\theta\, d\theta$, $(x^2 + 1) = \sec^2\theta$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta}$$



$$= \int \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \int \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}[\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta] + C$$

$$= \tfrac{1}{2}[\theta + \tfrac{1}{2} . 2 \sin\theta \cos\theta] + C$$

$$= \tfrac{1}{2}[\tan^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}] + C$$

$$= \tfrac{1}{2}[\tan^{-1} x + \frac{x}{1 + x^2}] + C$$

$$\therefore \int \frac{(x^5 + 2x^3 + x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)^2} dx = \ln|x - 1|$$

$$- \frac{1}{(x - 1)} + \tfrac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C$$

مثـال (٢) :

أوجد قيمة هذا التكامل $\int \frac{x^{10}\,dx}{x^4 - 1}$

الحـل :

بما أن درجة البسط أعلى من درجة المقام نجرى عملية القسمة حتى تصير درجة البسط اقل من درجة المقام

$$\therefore \frac{x^{10}}{x^4 - 1} = x^6 + x^2 + \frac{x^2}{x^4 - 1}$$

نأخذ الكسر الأخير ونحلله الى كسوره الجزئية وهى :

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1}$$

$$\therefore \int \frac{x^{10}}{x^4 - 1}\,dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} + \tfrac{1}{4} \ln |x - 1|$$

$$- 1/4 \ln |x + 1| + \tfrac{1}{2} \tan^{-1} x + C$$

١٠ ـ ٦ التكامل بالتجزىء Integration by Parts :

هذه هى فى الحقيقة الطريقة العامة الثانية من طرق التكامل اذا اعتبرنا ان الطريقة العامة الأولى هى طريقة التعويض فان طريقة التكامل بالتجزىء وهى فى الواقع الطريقة العامة الثانية (وذلك باعتبار ان طريقة التحليل الى الكســـــور الجزئية ماهى الا عملية جبرية لتحويل الدوال القياسية الى دوال ابسط قابلة للتكامل) . وفى الواقع فان طريقة التكامل بالتجزىء ليست الا الصيغة التكاملية لعملية تفاضل حاصل ضرب دالتين فكما نعلم اذا كان لدينا الدالتين u , v فان :

$$d(u.v) = u\,dv + v\,du$$

ومن ثم فان الصيغة التكاملية لهذا هى :

$\int d(u.v) = \int u\,dv + \int v\,du$ أو $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

١٠ ـ ٦ ـ ١ امثلة :

مثال (١) :

اوجد : $\int \ln x \, dx$

الحـــل :

نعتبر $v = x , u = \ln x$

$$dv = dx \ , \ du = \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore \int \underbrace{\ln x}_{u} . d \underbrace{x}_{v} = (\ln x) . x - \int x . \frac{1}{x} dx$$

$$= (\ln x) . x - \int dx . = x . (\ln x) - x + C$$

مثال (٢) :

اوجـــد $\int \tan^{-1} x \, dx$

الحـــل :

نضــع : $v = x \ , \ u = \tan^{-1} x$

ومن ثم $du = \frac{1}{1 + x^2} dx \qquad dv = dx$

$$\therefore \int \tan^{-1} x \, dx = (\tan^{-1} x) x - \int x . \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$= x (\tan^{-1} x) - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$$

مثال (١) :

$$\int x^3 e^x dx$$

الحـــل :

نأخذ $u = x^3$ فيكون $du = 3 x^2 dx$

$dv = e^x dx$ فيكون $v = e^x$

$$\therefore \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx \quad \ldots\ldots (1)$$

ثم نكامل بالتجزىء مرة اخرى التكامل $\int x^2 e^x dx$

باخذ $u = x^2$ فيكون $du = 2x\, dx$

و $v = e^x$ فيكون $dv = e^x dx$

$$\therefore \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad \ldots\ldots (2)$$

ثم نكامل بالتجزىء مرة ثالثة التكامل $\int x e^x dx$

باخذ $u = x$ فيكون $du = dx$

و $v = e^x$ فيكون $dv = e^x dx$

$$\therefore \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C \quad \ldots\ldots (3)$$

وباستخدام (3) , (2) فى (1)

$$\therefore \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C$$

نلاحظ فيمـــا سبق اننا كنا نختار الدالة التى تكامل بحيث يكون تكاملها معروفا ونختار الدالة التى تفاضـــل بحيث يكون التكامل الناتج ابسط من سابقه . لو حاولنا عكس هذه العملية فى المجموعة السابقة من الأمثلة فاننا نواجه تكاملات اصعب . ولكن فى بعض الأحـوال قد يكون اختيار اى من الدالتين يؤدى الى نفس الشىء .

مثال (٤) :

احسب قيمة التكامل $\int e^{ax} \sin bx\, dx$

الحـل :

يمكننا اختيار $u = \dfrac{e^{ax}}{a}$ فيكون $du = e^{ax} dx$

و $v = \sin bx$ فيكون $dv = b \cos bx\, dx$

$$\therefore \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

مرة اخرى نختار $du = e^{ax}\,dx$ فيكون $u = \dfrac{e^{ax}}{a}$

$v = \cos bx$ فيكون $dv = -b \sin bx\, dx$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}\Big\{ \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx$$

$$+ \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx\, dx \Big\}$$

$$\therefore \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx$$

$$- \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx\, dx$$

والتكامل الأخير هو نفس التكامل الأول ومن ثم نجمعه على التكامل الأول :

$$\therefore \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx$$

$$- \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx + C_1$$

$$\therefore \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)} \{ a \sin bx - b \cos bx \} + C$$

ويمكن وضعها فى الصورة

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin (bx - \alpha) + C$$

حيث : $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ويمكننا فى هذا المثال أن نختار $v = e^{ax}$, $du = \sin bx\, dx$

ثم نتابع التكامل . ويجب ان ننبه على انه لاينبغى الخلط بين u, v فاذا اعتبرنا « u » هى احدى الدوال فلابد أن نتابع التكامل متخذين من « u » هذه الدالة طوال خطوات التكامل .

١٠ ـ ٧ التكامل بالاختزال Reduction :

فى هذه الطريقة نتعامل مع قوى من رتبة « n » مثلا وتكاملها ونحاول أن نحصل على تكامل لرتبة أقل من « n » . فمثلا التكاملات التى تحتوى على الدوال المثلثية أو الزائدية مرفوعة لقوة « n » يمكننا أن نختزلها الى رتبة أقل . وستتاح لنا فرصة لمعرفة ذلك من خلال الأمثلة الآتية :

١٠ ـ ٧ ـ ١ أمثلة :

أوجد قوانين الاختزال للتكاملات الآتية :

1) $I_n = \int \sin^n x\, dx$ 2) $I_n = \int \cos^n x\, dx$

3) $I_n = \int \sinh^n x\, dx$ 4) $I_n = \int \sec^n x\, dx$

الحـل :

(i) بالنسبة الى التكامل $I_n = \int \sin^n x\, dx$

نكتب $\sin^n x\, dx = (\sin x)^{n-1} \sin x\, dx$

ثم نطبق التكامل بالتجزىء

$$I_n = -\sin^{n-1} x . \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x . \cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x . \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x . (1 - \sin^2 x)\, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x . \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x\, dx$$

$$- (n - 1) \int \sin^n x\, dx$$

ونجد ان التكاملين الأخيرين هما I_n , I_{n-2} على الترتيب فنحصل على :

$$I_n (1 + n - 1) = -\sin^{n-1} x . \cos x + (n - 1) I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \, . \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

فمثلا :

$$I_4 = {}_0\int^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = -\tfrac{1}{4} [\sin^3 x \, . \cos x]_0^{\pi/2} + \tfrac{3}{4} I_2$$

وهو تطبيق للقانون السابق عندما $n = 4$

$$= 0 + \tfrac{3}{4} \{ [-\tfrac{1}{2} \sin x \, . \cos x]_0^{\pi/2} + \tfrac{1}{2} I_0 \} = \tfrac{3}{4} \, . \tfrac{1}{2} I_0$$

ولكن I_0 قيمته كالتالى :

$$I_0 = {}_0\int^{\pi/2} (\sin x)^0 \, dx = {}_0\int^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \pi/2 \therefore$$

وعليه نجد : $\therefore \quad I_4 = \tfrac{3}{4} \, . \tfrac{1}{2} (\pi/2)$

وكتمرين احسب I_5 حيث :

$$I_5 = {}_0\int^{\pi/2} \sin^5 x \, dx$$

(ii) ننظر الآن الى التكامل الآتى :

$$I_n = \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \, . \cos x \, dx = \int \cos^{n-1} x \, d \sin$$

وبالتكامل بالتجزىء

$$\therefore \quad I_n = \cos^{n-1} x \, . \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, . \sin^2 x \, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \, . \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} (1 - \cos^2 x) \, d$$

$$= \cos^{n-1} x \, . \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$- (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

$$\therefore \quad I_n = \cos^{n-1} x \, . \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

وعليه يكون قانون الاختزال هو :

$$\therefore \quad I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \, . \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

وكمثال نوجد قيمة التكامل $I_5 = {}_0\int^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$

وباستخدام القانون السابق عندما $n = 5$ علما بأن التكامل محدود

$$\therefore \quad I_5 = \frac{1}{5} [\cos^4 x \sin x]_0^{\pi/2} + \frac{4}{5} I_3$$

$$= 0 + \frac{4}{5} \{ [\frac{1}{3} \cos^2 x \,.\, \sin x]_0^{\pi/2} + \frac{2}{3} I_1 \}$$

$$= \frac{4}{5} \,.\, \frac{2}{3} \,.\, I_1$$

ولكن $I_1 = {}_0\int^{\pi/0} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

$$\therefore \quad I_5 = \frac{4}{5} \,.\, \frac{2}{3} \,.\, 1$$

(iii) نجرى الآن التكامل

$$I_n = \int \sinh^n x \, dx = \int \sinh^{n-1} x \sinh x \, dx = \int \sinh^{n-1} x \, d \cosh x$$

$$= \sinh^{n-1} x \cosh x - (n-1) \int \cosh^2 x \sinh^{n-2} x \, dx$$

$$= \sinh^{n-1} x \cosh x - (n-1) \int (1 + \sinh^2 x) \sinh^{n-2} x$$

$$= \sinh^{n-1} x \,.\, \cosh - (n-1) \int \sinh^{n-2} x \, dx$$

$$- (n-1) \int \sinh^n x \, dx$$

$$= \sinh^{n-1} x \,.\, \cosh - (n-1) \quad I_{n-2} - (n-1) \, I_n$$

$$\therefore \quad I_n \, (1 + n - 1) = \sinh^{n-1} x \,.\, \cosh x - (n-1) \, I_{n-2}$$

ويكون قانون الاختزال هو :

$$\therefore \quad I_n = \frac{1}{n} \sinh^{n-1} x \,.\, \cosh x - \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

وكتمرين على ذلك احسب I_4 حيث

$$I_4 = \int \sinh^4 x \, dx$$

$$\therefore \quad I_4 = \tfrac{1}{4} \sinh^3 x \,.\, \cosh x - \tfrac{3}{4} I_2$$

$$= \tfrac{1}{4} \sinh^3 x \,.\, \cosh x - \tfrac{3}{4} (\tfrac{1}{2} \sinh x \,.\, \cosh x - \tfrac{1}{2} I_0)$$

ولكن $I_0 = \int \sinh^0 x\, dx = \int dx = x + C$

$$\therefore\ I_4 = \tfrac{1}{4} \sinh^3 x \cosh x - \frac{3}{8} \sinh x \cosh x + \frac{3}{8} x + C$$

(iv) اخيرا ننظر الى الصيغة $I_n = \int \sec^n x\, dx$

نكتب $\sec^n x = \sec^{n-2} x \cdot \sec^2 x$

ولكن $\sec^2 x\, dx = d \tan x$ ثم نطبق قانون التكامل بالتجزىء

$$\therefore\ I_n = \int \sec^n x\, dx = \int \sec^{n-2} x\, d \tan x$$

$$= \sec^{n-2} x . \tan x - \int \tan x . (n - 2) \sec^{n-3} x . \sec x \tan x\, dx$$

$$= \sec^{n-2} . \tan x - (n - 2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \sec^{n-2} x . \tan x - (n - 2) \int \sec^n x\, dx + (n - 2) \int \sec^{n-2} x\, dx$$

$$\therefore\ I_n = \sec^{n-2} x . \tan x - (n - 2) I_n + (n - 2) I_{n-2}$$

$$\therefore\ I_n (1 + n - 2) = \sec^{n-2} x \tan x + (n - 2) I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{n - 1} \sec^{n-2} x . \tan x + \frac{n - 2}{n - 1} I_{n-2}$$

وهو قانون الاختزال المطلوب وكتطبيق على هذا نحسب

$$I_3 = \int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2} \sec x . \tan x + \tfrac{1}{2} I_1$$

$$I_1 = \int \sec x\, dx = \ln | \sec x + \tan x |$$

$$\therefore\ \int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2} \sec x . \tan x + \tfrac{1}{2} \ln | \sec x + \tan x | + C$$

ولنترك للقارىء أن يختار طريقة اخرى ليتأكد من هذه النتيجة

تمرين (١) :

احسب قيمة التكامل $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$

الحل :

باستخدام التعويض $x = a \tan \theta$ فيكون $dx = a \sec^2 \theta\, d\theta$

وكذلك $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec\theta$ وعليه يصير

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = a^2 \int \sec^3\theta\, d\theta$$

وهو نفس التكامل السابق I_3 فى المثال (iv) السابق

حل آخر :

وذلك باستخدام التكامل بالتجزىء

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int x\, d\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x \cdot 2x\, dx}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$$

باضافة وطرح a^2 فى البسط

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{(x^2 + a^2 - a^2)}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx$$

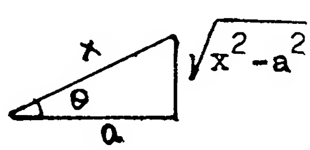
$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\therefore\ 2\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \sinh^{-1}(x/a) + C$$

$$\therefore\ \int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\{x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \sinh^{-1}(x/a)\} + C$$

تمرين (٢) :

احسب قيمة التكامل $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$



الحـل :

باستخدام التعويض $x = a \sec\theta$ فيكون $dx = a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

وكذلك $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan\theta$ وعليه يصير

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \int a \tan\theta \,.\, a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

$$= a^2 \int (\sec^2\theta - 1) \sec\theta \, d\theta$$

$$= a^2 \int \sec^3\theta \, d\theta - a^2 \int \sec\theta \, d\theta$$

$$= a^2 \left[\tfrac{1}{2} \{ \sec\theta \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| \} - \ln|\sec\theta + \tan\theta| \right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\sec\theta \tan\theta - \ln|\sec\theta + \tan\theta| \right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} - \ln\left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| \right] + C$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| \right] + C'$$

حل آخر :

هذا التكامل السابق يمكن اجراؤه باستخدام التكامل بالتجزيء كالمثال السابق فيما يلى :

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = x \,.\, \sqrt{x^2 - a^2} - \int x \,.\, \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\therefore \quad 2\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \cosh^{-1}(x/a) \quad + C$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\{\, x \,.\, \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \cosh^{-1}(x/a)\} + C$$

١٠ ــ ٨ بعض التعويضات الاخرى Further Substitutions :

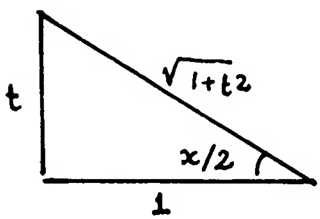
نعالج فى هذا البند بعض الدوال الأخرى التى لم ترد فيما سبق وسنتعرض أولا لتكاملات الدوال القياسية (Rational functions) التى تحتوى الدوال المثلثية والزائدية وبعد ذلك نتعرض لبعض الأمثلة التى تعالج بتعويضات مناسبة . وفى هذا البند ليست مهمتنا الحصر ولكن فقط لضرب الأمثلة وتبيان الطريق الذى ننتهجه لكى نحصل على التكاملات .

١٠ ــ ٨ ــ ١ :

التكاملات التى تحتوى على دوال قياسية للدوال المثلثية :

فى حالة الدوال المثلثية (sin x, cos x..)

نستخدم التعويض $\tan \tfrac{1}{2}x = t$



ومن ثم نجد أن :

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x$$

$$= 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

من التعويض $\tan\frac{x}{2} = t$ فان $\frac{x}{2} = \tan^{-1} t$

$$\therefore \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

١٠ ـ ٨ ـ ١ ـ ١ أمثلة :

مثال (١) :

أوجد $\int \sec x \, dx$

الحـل :

سبق وان حسبنا هذا التكامل ولكننا سنعامل $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ثم نعوض

$\tan \dfrac{x}{2} = t$ ومنها فان $dx = \dfrac{2\,dt}{1 + t^2}$ وكذلك $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

$$\therefore \int \sec x \, dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \cdot \frac{2\,dt}{1 + t^2} = \int \frac{2\,dt}{1 - t^2}$$

$$= \int \left(\frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t}\right) dt = \ln|1 + t| - \ln|1 - t| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C \qquad = \ln\left|\frac{1 + \tan x/2}{1 - \tan x/2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\tan \pi/4 + \tan x/2}{1 - \tan \pi/4 \, . \, \tan x/2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$$

مثال (٢) :

اوجد قيمة التكامل $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$

الحـل :

نستخدم نفس التعويض السابق

$$\therefore \int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\,\{1+2t/(1+t^2)\}} =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{1 + t^2 + 2t} = \int \frac{2\,dt}{(t + 1)^2} = 2 \int (t + 1)^{-2}\,dt$$

$$= 2\,\frac{(t + 1)^{-1}}{-1} + C = \frac{-2}{1 + t} + C$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x} = \left[\frac{-2}{1 + \tan x/2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-2}{1 + 1} + \frac{2}{1 + 0} = -1 + 2 = 1$$

مثال (٣) :

الحسب $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$

الحـل :

باستخدام نفس التعويض السابق

$$\therefore \int \frac{dx}{2 + \cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\,\{2+(1-t^2)/(1+t^2)\}} =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(2\,t^2 + 2 + 1 - t^2)} = \int \frac{2\,dt}{t^2 + 3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\left(\tan \frac{x}{2}\right) / \sqrt{3}\right) + C$$

مثال (٤) :

احسب $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

الحـــل :

باستخدام نفس التعويض

$$\therefore \int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\{2t/(1+t^2) - (1-t^2)/(1+t^2)\}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(2t - 1 + t^2)}$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1}$$ باكمال المربع فى المقام

$$= 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 2} = -2 \int \frac{dt}{2 - (t+1)^2}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}} \tanh^{-1} \left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

بشرط $|t+1| < \sqrt{2}$

$$= -\sqrt{2} \tanh^{-1} \left(\frac{(\tan x/2) + 1}{\sqrt{2}}\right), \left|\tan \frac{x}{2} + 1\right| < \sqrt{2}$$

١٠ ـ ٨ ـ ٢ : الدوال القياسية للدوال الزائدية :

فى تكاملات مثل هذه الدوال نستخدم التعويض $\tanh \frac{x}{2} = t$

$$\therefore \quad \sinh x = 2 \sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2} = 2 \tanh \frac{x}{2} . \cosh^2 \frac{x}{2}$$

$$= \frac{2 \tanh x/2}{\operatorname{sech}^2 x/2} = \frac{2 \tanh x/2}{1 - \tanh^2 x/2} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\cosh x = 2 \cosh^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\operatorname{sech}^2 x/2} - 1$$

$$= \frac{2}{1 - \tanh^2 2/x} - 1 = \frac{2}{1 - t^2} - 1 = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$$

$$\therefore \quad x/2 = \tanh^{-1} t \qquad \therefore \quad dx = \frac{2\, dt}{1 - t^2}$$

١٠ ـ ٨ ـ ٢ ـ ١ امثلة :

مثال (١) :

احسب قيمة التكامل $\int \operatorname{sech} x \, dx$

الحـل :

وان كان سبق لنا ان حسبنا هذا التكامل ولكننا سنستخدم التعويض الفائت فى حل هذا التكامل وذلك بوضع

$$\therefore \quad \int \operatorname{sech} x \, dx = \int \frac{1}{\cosh x} dx = \int \frac{1}{(1+t^2)/(1-t^2)} . \frac{2\, dt}{(1 - t^2)}$$

$$= 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} = 2 \tan^{-1} t + C$$

$$= 2 \tan^{-1} (\tanh x/2) + C$$

مثال (٢) :

اوجد قيمة التكامل $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + \cosh x}$

الحـل :

باستخدام نفس التعويض السابق نحصل على :

$$\int \frac{dx}{1 + \cosh x} = \int \frac{2\,dt}{\{1 + (1 + t^2)/(1 - t^2)\}\,(1 - t^2)}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(1 - t^2 + 1 + t^2)} = \int dt = t + C = \tanh x/2 + C$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{1 + \cosh x} = [\tanh x/2]_0^\infty = 1 - 0 = 1$$

ملحوظة :

يمكننا الحصول على هذه النتيجة مباشرة لو استخدمنا العلاقة

$$1 + \cosh x = 2\cosh^2 x/2$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + \cosh x} = \int_0^\infty \frac{1}{2\cosh^2 x/2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \operatorname{sech}^2 x/2\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[2\tanh x/2)]_0^\infty = 1$$

مثال (٣) :

اوجد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{2 + \sinh x}$

الحـل :

باستخدام نفس التعويض السابق

$$\therefore \int \frac{dx}{2+\sinh x} = \int \frac{2\,dt}{\{2+2t/(1-t^2)\}(1-t^2)}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{2-2t^2+2t} = \int \frac{dt}{-t^2+t+1} = \int \frac{dt}{5/4-(t-\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \tanh^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{5}/2}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \tanh^{-1}\left(\frac{\tanh x/2-\frac{1}{2}}{\sqrt{5}/2}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \tanh^{-1}\left(\frac{2\tanh(x/2)-1}{\sqrt{5}}\right) + C\,,$$

$$|\tanh x/2 - \tfrac{1}{2}| < \sqrt{5}/2$$

١٠ ـ ٨ ـ ٣ : تعويضات أخرى :

سنسوق هنا بعض الأمثلة لهذه التعويضات

مثال (١) :

احسب قيمة التكامل $\int \frac{\sqrt[n]{x}}{1+\sqrt[2n]{x}}\,dx$

الحل :

نضع $t = \sqrt[2n]{x}$ فيكون $x = t^{2n}$

$$\therefore dx = 2n\,t^{2n-1}\,dt$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt[n]{x}\,dx}{1+\sqrt[2n]{x}} = 2n\int \frac{t^2 \cdot t^{2n-1}}{t+1}\,dt = 2n\int \frac{t^{2n+1}}{t+1}\,dt$$

نجرى عملية القسمة كما سبق

$$= 2n \int \left(t^{2n} - t^{2n-1} + t^{2n-1} - \ldots - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

ومن الواضح أن اجراء عملية التكامل بعد ذلك بسيطة

مثال (٢) :

احسب التكامل $\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\, dx$

الحـل :

هناك أكثر من طريقة لحل هذا التكامل

الطريقة الأولى :

$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ضرب البسط والمقام في $\sqrt{1-x}$

$$\therefore \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

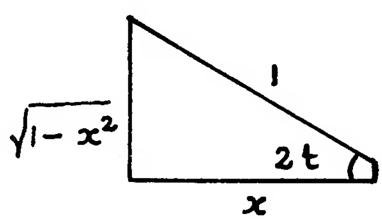
$$- \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

الطريقة الثانية :

نضع $x = \cos 2t$ فيكون $dx = -2 \sin 2t\, dt$

$$\therefore 1 - x = 1 - \cos 2t = 2 \sin^2 t$$

$$\therefore 1 + x = 1 + \cos 2t = 2 \cos^2 t$$



$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \tan t$$

$$\therefore \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = -2 \int \tan t \sin 2t\, dt$$

$$= -2 \int \tan t \,.\, 2 \sin t \cos t\, dt$$

$$= -4 \int \sin^2 t\, dt \qquad = -2 \int (1 - \cos 2t)\, dt$$

$$= -2\left[t - \tfrac{1}{2}\sin 2t\right] + C \quad = -2t + \sin 2t + C$$

$$= -\cos^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

$$= \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C'$$

وهى نفس النتيجة السابق علما بأن

$$\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$$

الطريقة الثالثة :

نرفع الجذر وذلك بأن نكتب $\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}} = z$

$$\therefore\ 1 - x = (1 + x)\, z^2 \qquad \therefore\ 1 - z^2 = x\,(1 + z^2)$$

$$\therefore\ dx = \frac{-4z\, dz}{(1 + z^2)^2} \qquad \therefore\ x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$$

$$\therefore\ \int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx = \int \frac{-4\, z^2\, dz}{(1 + z^2)^2}$$

بوضع $z = \tan\theta$ فان $\therefore\ dz = \sec^2\theta\, d\theta$

$$= -4 \int \frac{\tan^2\theta \,.\, \sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^2} = -4 \int \sin^2\theta\, d\theta$$

وهو نفس التكامل فى الطريقة الثانية .

مثال (٣) :

احسب هذا التكامل $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$

الحـل :

نضع $\dfrac{1}{x + 1} = z$ فيكون $x + 1 = \dfrac{1}{z}$

ومنه فان $\quad x = \dfrac{1}{z} - 1 = \dfrac{1-z}{z} \; , \; dx = \dfrac{-1}{z^2}\, dz$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$$

$$= \int \frac{z \,.\, (-1/z^2\, dz)}{\sqrt{((1-z)/z)^2 + ((1-z)/z) + 1}}$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)^2 + z(1-z) + z^2}}$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{1 - 2z + z^2 + z - z^2 + z^2}} = \int \frac{-\,dz}{\sqrt{z^2 - z + 1}}$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{(z-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = -\sinh^{-1}\left(\frac{z-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right) + C$$

$$= -\sinh^{-1}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= -\sinh^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right\} + C$$

تمـارين

١ ـ احسب قيم التكاملات الآتية :

1) $\int \sqrt{3x + 4}\, dx$ 2) $\int \frac{dx}{2x - 6}$

3) $\int \frac{dx}{(4x + 5)^5}$ 4) $\int \frac{(x + 1)}{(x^2 + 2x + 5)}\, dx$

5) $\int \frac{\sin x\, dx}{2 + \cos x}$ 6) $\int \tan^3 2x \sec^2 2x\, dx$

7) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ 8) $\int x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{x^{\frac{1}{2}} - 2}\, dx$

9) $\int \frac{x^2\, dx}{(3x^3 - 2)^3}$ 10) $\int x^6 \sqrt{x^7 + 5}\, dx$

11) $\int \frac{x^{1/6}}{\sqrt{x^{7/6} + 2}}\, dx$ 12) $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$

13) $\int e^{\tanh x} \operatorname{sech}^2 x\, dx$ 14) $\int \frac{dx}{e^{3x}}$

15) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ 16) $\int \frac{e^{2n}}{e^{2n} + 5}\, dn$

17) $\int \cosh^2 x \sinh x\, dx$ 18) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\, dx$

19) $\int \cot^3 x \csc^2 x \, dx$ 20) $\int \tanh 3x \,\text{sech}^2 3x \, dx$

21) $\int \tanh 2x \, dx$ 22) $\int (1 + \cos x)^3 \sin x \, dx$

23) $\int \text{cosech}^2 x \coth x \, dx$ 24) $\int (t + 1) e^{(t^2 + 2t + 3)} \, dt$

25) $\int \frac{\cos x}{1 + 4 \sin x} \, dx$ 26) $\int \frac{\cosh x}{\sqrt{1 + 2 \sinh x}} \, dx$

27) $\int \frac{\text{sech}^2 x}{1 + \tanh x} \, dx$ 28) $\int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} \, dx$

29) $\int \sec^2 x \, e^{\tan x} \, dx$ 30) $\int \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 2x} \, dx$

31) $\int \frac{\sin^2 2t}{1 + \cos 2t} \, dt$ 32) $\int \frac{\csc^2 2t \, dt}{\sqrt{1 + \cot 2t}}$

33) $\int \frac{\text{sech}^2 3x \, dx}{(1 + \tanh 3x)^4}$ 34) $\int \frac{e^{\tan^{-1} 2t}}{1 + 4t^2} \, dt$

35) $\int 3^x \, dx$ 36) $\int x \cos x^2 \, dx$

٢ ــ احسب التكاملات الآتية :

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ 2) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx$

3) $\int \sec^n x \tan x \, dx$ 4) $\int \tan^n x \sec^2 x \, dx$

5) $\sin^n x \cos x \, dx$ 6) $\int \cos^n x \sin x \, dx$

7) $\int \sinh^n x \cosh x \, dx$ 8) $\int \sinh x \cosh^n x \, dx$

9) $\int \tanh^n x \,\text{sech}^2 x \, dx$ 10) $\int \text{sech}^n x \tanh x \, dx$

11) $\int \sin^3 x \, dx$ 12) $\int \cos^3 3x \, dx$

13) $\int \tan^5 2x \, dx$ 14) $\int \tanh u \, du$

15) $\int \tanh^2 5x \, dx$ 16) $\int \sinh^2 x \, dx$

17) $\int \operatorname{sech} 4t \, dt$

18) $\int \sinh u \sqrt{1 + \sinh^2 u} \, du$

19) $\int \frac{e^x \, dx}{1 + e^x}$ 20) $\int (\ln ax)^n \frac{dx}{x}$

21) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ 22) $\int \cot^3 x \, dx$

23) $\int \csc^4 dx$ 24) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

25) $\int \frac{dx}{x (2 + \ln x)}$ 26) $\int \frac{\sinh^3 x}{\cosh^2 x} dx$

٣ ــ احسب التكاملات الآتية :

1) $\int_0^{a/2} \frac{x \, dx}{a^2 - x^2}$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

3) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ 4) $\int \frac{dx}{4 - (x - 1)^2}$

5) $\int \sec 2t \, dt$ 6) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ 8) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

9) $\int_0^2 \frac{x \, dx}{4 + x^2}$ 10) $\int_0^2 \frac{dx}{4 + x^2}$

11) $\int_0^1 \frac{dx}{4 - x^2}$

12) $\int \csc u \, du$

13) $\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 + x^2}}$

14) $\int \frac{(x + 1) \, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

15) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}}$

16) $\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}}$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

18) $\int \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{\sqrt{2 - \cot^2 \theta}}$

19) $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

20) $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$

21) $\int \frac{dx}{9 - x^2}$

22) $\int \frac{x \, dx}{16 + x^2}$

23) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x - 2)^2 - 4}}$

٤ ـ احسب التكاملات الآتية :

1) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$

2) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$

3) $\int \frac{(x + 1) \, dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

4) $\int \frac{(x - 1) \, dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

5) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

7) $\int \frac{(1 - x)\, dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}$ 8) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$

9) $\int \frac{x\, dx}{x^2 + 4x + 5}$ 10) $\int \frac{(2x + 3)\, dx}{4x^2 + 4x + 5}$

11) $\int \frac{(x + 1)\, dx}{5 - 4x - x^2}$ 12) $\int \frac{(3 - x)}{2x - x^2}\, dx$

٥ ـ حلل كل دالة الى كسورها الجزئية ثم اجر التكامل .

1) $\int \frac{(1 + x)\, dx}{x^2 + 4x - 5}$ 2) $\int \frac{x\, dx}{x^2 - 2x - 3}$

3) $\int \frac{(x - 1)\, dx}{x^2 - 6x + 5}$ 4) $\int \frac{x^2\, dx}{x^2 + 2x + 1}$

5) $\int \frac{dx}{x (x + 1)^2}$ 6) $\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$

7) $\int \frac{dx}{x (x^2 + x + 1)}$ 8) $\int \frac{\sin \theta\, d\theta}{\cos^2 \theta + \cos \theta - 2}$

9) $\int \frac{e^t\, dt}{e^{2t} + 3e^t + 2}$ 10) $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

11) $\int \frac{x^4\, dx}{(x^2 + 1)^2}$

12) $\int \frac{\sinh \theta \cosh \theta\, d\theta}{2 \cosh^2 \theta + \cosh \theta - 1}$

٦ — أوجد مايلى من تكاملات :

1) $\int x \ln x \, dx$

2) $\int x^n \ln ax \, dx, \quad (n \neq -1)$

3) $\int x \tan^{-1} x \, dx$ 4) $\int x \sin^{-1} x \, dx$

5) $\int \sin^{-1} ax \, dx$ 6) $\int x^2 \cosh ax \, dx$

7) $\int x \sec^2 ax \, dx$ 8) $\int x \operatorname{sech} x \tanh x \, dx$

9) $\int e^{ax} \sin bx \, dx$ 10) $\int \sin (\ln x) \, dx$

11) $\int \cosh (\ln x) \, dx$ 12) $\int \ln (a^2 + x^2) \, dx$

13) $\int x \cos (2x + 1) \, dx$ 14) $\int (x + 1) \sinh 3x \, dx$

15) $\int x \sin^{-1} x \, dx$ 16) $\int_1^2 x \sec^{-1} x \, dx$

17) $\int \sec^{-1} \sqrt{x} \, dx$ 18) $\int_0^1 x^2 \tan^{-1} x \, dx$

19) $\int \operatorname{sech}^{-1} x \, dx$

20) $\int (3x^2 + 1) \tanh^{-1} x \, dx$

٧ — اثبت قوانين الاختزال التالية ثم طبق على التمارين المعطاه :

1) $$\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{(m + 1)} - \frac{n}{m + 1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx$$

(a) $\int x^3 (\ln x)^2 \, dx$ (b) $\int x^2 (\ln x)^3 \, dx$

2) $$\int \sin^n x \, dx = - \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n - 1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

ثم استنتج قيمة التكامل المحدود فى الفترة $[0, \pi/2]$ لقيمة « n » المختلفة

أوجد (a) $\int_0^{\pi/6} \sin^4 3x \, dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$

3) $$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{(\sin x)^{n+1} (\cos x)^{m-1}}{m + n} + \frac{m - 1}{m + n} \int \sin^n x \cos^{m-2} x \, dx$$

ثم استنتج قيمة التكامل المحدود فى الفترة $[0, \pi/2]$ لقيم m, n المختلفة واوجد :

(a) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x \, dx$ (b) $\int_0^{\pi/6} \sin^6 3x \cos^4 3x \, dx$

4) $\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} dx$

(a) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$ (b) $\int_0^{\infty} x^4 e^{-2x} dx$

5) $$\int \operatorname{sech}^n x \, dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} x \ \ \operatorname{anh} x}{n-1} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \int \operatorname{sech}^{n-2} x \, dx$$

(a) $\int \operatorname{sech}^3 x \, dx$ (b) $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx$

٨ ــ احسب التكاملات الآتية :

1) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x}$ 2) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x}$

3) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$ 4) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$

5) $\int \frac{\cos x \, dx}{2 - \cos x}$ 6) $\int_0^{\pi/2} \cos 3x \sin 2x \, dx$

7) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 2x \, dx$ 8) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x \, dx$

9) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^8 x \, dx$ 10) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^8 x \, dx$

11) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^6 x \, dx$ 12) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^5 x \, dx$

٩ ــ يقال للدالتين f, g انهما متعامدتان فى النطاق $[a, b]$ اذا كان $\int_a^b f(x) \, g(x) \, dx = 0$ فاثبت مايلى :

(أ) الدالتان $\sin mx, \sin nx$ متعامدتان على أى نطاق طوله (2π) بشرط أن يكون $m^2 \neq n^2$

(ب) نفس النظرية صحيحة بالنسبة للدالتين $\sin mx, \cos nx$

(جـ) نفس النظرية صحيحة بالنسبة للدالتين $\cos mx, \cos nx$

١٠ ـ احسب التكاملات مستخدما التعويض المناسب :

1) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\sqrt{x}}$

3) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+a}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+a}}{x+b}\,dx$

5) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-x^{2/3}}$

9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$ 10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1-\sqrt[4]{x})}$

11) $\displaystyle\int \frac{y^{3/2}}{1+y}\,dy$ 12) $\displaystyle\int \frac{z^5\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$

13) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t^3-1}}{t}\,dt$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax^n+c)}$ $(a, c \neq 0)$

15) $\displaystyle\int_3^8 \frac{(x+2)}{x\sqrt{x+1}}\,dx$ 16) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{du}{(1+e^u)}$

17) $\int \frac{dx}{x - x^{2/3}}$

18) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta \, d\theta}{2 + \cos \theta}$

19) $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

20) $\int \frac{dy}{y^{1/2} - y^{1/3}}$

21) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$

22) $\int \frac{x \, dx}{x^4 + 16}$

23) $\int \sqrt{e^x + 2} \, dx$

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x}}$

25) $\int \frac{dx}{5 \csc x + 4}$

26) $\int \frac{\sqrt{2x + 3}}{(x - 1)} dx$

١١ – أوجد المساحات المحصورة بين المنحنيات الممثلة بالمعادلات الآتية :

(أ) $y = 0 , x = e^{3/2} , y = \ln x$

(ب) $x = 2 , 4x^2 - y^2 = 4$

(جـ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ داخل المنحنى

(د) $f(x) = \sin \sqrt{x} , y = 0$ فى النطاق $[0, \pi^2]$.

(هـ) $x = 1 , x = 0 , y = 0 , y = (16 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

(و) $y = \frac{x}{x^2 - 2x - 3} , y = 0$ فى النطاق $[0, 2]$.

(ز) $x = 1 , x = 0 , y = 0 , y = (x^3 + 1)^{-1}$.

(ح) $y = 0 , y = (x^2 + 1)^{-1}$

١٢ ـ أوجد الحجوم الناتجة من دوران المساحات المحصورة بالمنحنيات الممثلة بالمعادلات الآتية حول المحور السينى :

(أ) $x = e^{3/2}\ ,\quad y = \ln x$

(ب) $y = 0\ ,\ x = -1\quad y = \cos^{-1} x$

(جـ) $y = 0\ ,\ y = x\sqrt{\sin x}$ فى النطاق $[0, \pi/2]$

(د) $y = 0\ ,\ y = \tan^2 x$ فى النطاق $[0, \pi/4]$

(هـ) $x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(و) $x = 3\ ,\ x = 2\ ,\ y = 3\ ,\ y = \dfrac{1}{(x - 1)\ (4 - x)}$

(ز) من دوران المساحة المحصورة بين المنحنيات
$x = 2\ ,\quad x = 0\ ,\ y = (x^2 + 2x + 10)^{-1}\quad ,\ y = 0$

١٣ ـ أوجد اطوال المنحنيات الآتية :

(أ) منحنى الدالة $y = \frac{1}{2} x^2$ من $A\ (0, 0)$ الى $B\ (2, 2)$

(ب) منحنى الدالة $24\, x\, y = x^4 + 48$ فى النطاق $[2, 4]$.

(جـ) منحنى الدالة $y = \dfrac{1}{8} x^4 + \dfrac{1}{4\, x^2}$ فى النطاق $[1, 4]$

(د) منحنى الدالة $x = t^2\ ,\ y = t^3$ من $t = 0$ الى $t = 4$

(هـ) منحنى الدالة $x = \theta - \sin\theta\ ,\quad y = 1 - \cos\theta$
حيث $\theta \in [0, 2\pi]$.

(و) القطع المكافىء $y^2 = 12\, x$ من الرأس $(0, 0)$ الى النقطة $(3, 6)$.

الباب الحادي عشر

الأعداد المركبة

Complex Numbers

تعرضنا فى الباب الأول الى حل المعادلات وناقشنا بالتفصيل حل معادلة الدرجة الثانية . ولقد وجدنا أنواعا من هذه المعادلات ليس لها حل على فئة الأعداد الحقيقية . فمثالا لذلك المعادلة $x^2 + 1 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية فى « x » وليس ليس لها حلا على فئة الأعداد الحقيقة . وهذا واضح من انه اذا كانت $x \in R$ فان $x^2 \geqslant 0$ ومن ثم $(x^2 + 1)$ لايمكن أن تكون مساوية للصفر اى $x^2 + 1 \neq 0$

وطبقا لذلك اذا كنا مرتبطين بفئة الأعداد الحقيقية فان فئة الحل لهذه المعادلة هى الفئة الخالية ϕ اما اذا أردنا ان نحصل على فئات للحل لمثل هذه المعادلات سوى الفئة الخالية ، فيجب علينا أن نوسع فئة الأعداد بحيث تحتوى أعدادا أخرى بجانب الأعداد الحقيقية . هذه الفئة الجديدة الموسعة يطلق عليها فئة الأعداد المركبة Complex numbers ويجب ان يكون واضحا أن فئة الأعداد الحقيقية عبارة عن فئة جزئية من فئة الأعداد المركبة .

١١ ــ ١ فئة الأعداد المركبة Complex numbers :

١١ ــ ١ ــ ١ تعريفات :

نسوق فيما يلى التعريف الأساسى للفئة ثم بعض العمليات على هذه الفئة .

تعريف ١١ ــ ١ ــ ١ :

العدد المركب هو الزوج المرتب من الأعداد الحقيقية فى الصورة (a, b) وترمز لفئة هذه الأعداد بالرمز C ويمكن كتابة ذلك رياضيا فى الصورة

$$C = \{ (a, b) : a, b \in R \}$$

فمثلا الأزواج المرتبة $(2, 3)$ ؛ $(3, 1)$ ؛ $(5, 3)$ تمثل اعدادا مركبة .

ويجب أن نلاحظ أن العدد (a, b) يختلف عن العدد (b, a) حيث $b \neq a$

تعريف ١١ ـ ١ ـ ٢ التساوى :

يقال ان العددين (a, b) , (c, d) متساويان اذا كان واذا كان فقط $a = c , b = d$ أى أن كل عنصر من عناصر أى زوج يتساوى مع العنصر المقابل له فى الزوج الآخر .

تعريف ١١ ـ ١ ـ ٣ الجمع :

حاصل جمع العددين (a, b) , (c, d) هو العدد $(a + c, b + d)$

أى أن :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

ويمكننا ملاحظة ان :

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b)$$

مثال ١١ ـ ١ ـ ١ :

أوجد حاصل جمع الأعداد التالية :

$(3, 5)$, $(-2, 7)$; $(2, -3)$, $(5, 4)$

الحل :

$$(3, 5) + (-2,7) = (3 - 2, 5 + 7) = (1, 12)$$

$$(2, -3) + (5, 4) = (2 + 5, -3 + 4) = (7, 1)$$

مثال ١١ ـ ١ ـ ٢ :

أوجد العدد الذى اذا أضيف الى (a, b) صار حاصل الجمع $(0, 0)$

الحل :

نفرض أن هذا العدد هو (x, y) فعليه نجد أن :

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b) = (0, 0)$$

ومن خاصية التساوى نجد ان :

$x + a = 0 \quad \therefore \; x = -a$

$y + b = 0 \quad \therefore \; y = -b$

فيكون العدد هو :

$(x, y) = (-a, -b)$

تعريف ١١ ـ ١ ـ ٤ الطرح :

يعرف باقى طرح (c, d) من (a, b) على أساس أنه جمع المقدار (a, b) مع المقدار $(-c, -d)$

$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d) = (a-c, b-d)$$

مثال ١١ ـ ١ ـ ٣ :

$$(5, 3) - (2, 1) = (5 - 2, 3 - 1) = (3, 2)$$

$$(2, -1) - (4, -3) = (2 - 4, -1 - (-3)) = (-2, 2)$$

تعريف ١١ ـ ١ ـ ٥ الضرب :

يعرف حاصل ضرب العددين (a, b) , (c, d) بأنه العدد

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

مثال ١١ ـ ١ ـ ٤ :

أوجد حاصل ضرب العدد $(3, 1)$ مع العدد $(5, 2)$

الحل :

$$(3, 1) \cdot (5, 2) = (3 \times 5 - 1 \times 2, 1 \times 5 + 3 \times 2) = (13, 11)$$

ونجد أن حاصل ضرب $(1, -1)$ و $(1, 1)$

$$(1, 1) \cdot (1, -1) = (1 \times 1 - (1 \times -1), 1 \times -1 + 1 \times 1)$$
$$= (2, 0)$$

بينما نجد أن :

$$(5, 1) \cdot (1, 5) = (5 \times 1 - 1 \times 5, 5 \times 5 + 1 \times 1) = (0, 26)$$

مثال ١١ ــ ١ ــ و :

ماهو العدد الذى اذا ضرب فى العدد (a, b) يكون الناتج هو $(1, 0)$

الحــل :

نفترض أن العدد هو (x, y) فمن قانون الضرب نحصل على :

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$$

ومن شرط التساوى نجد أن :

$$ax - by = 1 , \quad ay + bx = 0$$

وهاتان معادلتان آنيتان فى مجهولين هما x , y فيكون حلهما هو :

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} , \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

اى ان العدد هو :

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} , \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

تعريف ١١ ــ ١ ــ ٦ مقلوب العدد :

يطلق على العدد $\left(\frac{a}{a^2 + b^2} , \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ مقلوب العدد (a, b)

والعكس صحيح .

اى انه اذا كان $z = (a, b) \neq (0, 0)$ حيث « z » ترمز للعدد المركب و « z^{-1} » ترمز لمقلوب العدد المركب « z » فان

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} , \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

وعليه يمكن اثبات أن :

$$(z^{-1})^{-1} = z$$

تعريف ١١ ــ ١ ــ ٧ القسمة :

يعرف خارج قسمة (a, b) على (c, d) بأنه حاصل ضرب العدد (a, b) مع مقلوب العدد (c, d) أى ان :

$$(a, b) \div (c, d) = (a, b) . \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2}\right)$$

بشرط ان $(c, d) \neq (0, 0)$

يمكن اثبات أن قانونى الجمع والضرب يخضعان لقاعدتى التبديل والتوزيع .

مثال ١١ ــ ١ ــ ٦ :

أوجد مقلوب (3, 4) ثم اوجد حاصل ضرب (3, 4) , (1, 2) وكذلك خارج القسمة .

الحــل :

من تعريف المقلوب نجد انه اذا كتبنا $z_1 = (3, 4)$ فان المقلوب

$$z_1^{-1} = \left(\frac{3}{3^2 + 4^2}, \frac{-4}{3^2 + 4^2}\right) = \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}\right)$$

واذا رمزنا للعدد (1, 2) بالرمز « z_2 » فان

$$z_1 . z_2 = (1, 2) . (3, 4) = (1 \times 3 - 2 \times 4 , 1 \times 4 + 2 \times 3)$$
$$= (-5, 10)$$

بينما

$$z_2 \div z_1 = z_2 . z_1^{-1} = \left(\frac{1 \times 3 + 2 \times 4}{25}, \frac{1 (-4) + 2 \times 3}{25}\right)$$

$$= \left(\frac{11}{25}, \frac{2}{25}\right)$$

١١ ـ ١ ـ ٢ الأعداد المركبة التى على الصورة (0, 1) , (k, 0) :

اذا نظرنا الى العدد المركب الذى فى الصورة (k, 0) فاننا نجد :

أولا ـ $(a, 0) \pm (b, 0) = (a \pm b, 0)$

ثانيا ـ $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$

ثالثا ـ $(a, 0) \div (b, 0) = (\frac{a}{b}, 0)$

ومن ثم نرى أن حاصل جمع أو باقى طرح أو حاصل ضرب أو خارج قسمة عددين مركبين على الصورة (k, 0) هو عدد مركب آخر فى نفس الصورة .

ومن الملاحظ أن العنصر الأول يتصرف مثل العدد الحقيقى « k » بينما العنصر الثانى هو دائما صفر . ولن يكون هناك أى تعارض اذا مثلنا العدد المركب الذى فى الصــــــورة (k, 0) بالعدد الحقيقى « k » أى يمكننا كتابة $k = (k, 0)$

ومن هذا التمثيل يتضح أن فئة الأعداد الحقيقية هى فئة جزئية من فئة الأعداد المركبة .

يمكننا بدون أى عناء استنتاج أن

$$k \cdot (a, b) = (k, 0) \cdot (a, b) = (ka, kb)$$

والآن لنتعرض للعدد المركب (0, 1) . يطلق عليه الوحدة التخيلية ويرمز له بالرمز « i »

أى أن : $i = (0, 1)$

ومن قوانين الضرب نجد أن : $i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1)$

$$= (0 \times 0 - 1 \times 1 , 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0)$$

$$\therefore \quad i^2 = -1$$

ومن ثم يمكننا القول أن : $i = \sqrt{-1}$

وعلى ذلك يمكننا تعريف الجذر التربيعى لأى عدد سالب كما يلى :

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 (-1)} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = a\,i$$

مثال ١١ ـ ١ ـ ٧ :

1) $\sqrt{-25} = \sqrt{5^2}\ \sqrt{-1} = 5\,i$

2) $\sqrt{-3}\ .\ \sqrt{-12} = (i\sqrt{3})\ (2\,i\sqrt{3})$

$= 2\,i^2\sqrt{3}\ .\ \sqrt{3} = 6\,i^2 = -6$

المثال الأخير يشير الى ملاحظة هامة وهى أن :

$\sqrt{a}\ .\ \sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$

اذا كان a, b عددين سالبين

١٠ ـ ١ ـ ٣ الصورة a + bi للعدد المركب

مما سبق يمكننا ان نضع العدد المركب الذى فى الصورة (a, b) على صورة مجموع حدين وهى كما يلى :

$(a, b) = a + ib$

واثبات ذلك فيما يلى :

$(a, b) = (a + 0, b + 0)$

$= (a, 0) + (0, b) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1) = a\,.\,1 + bi$

$\therefore\ (a, b) = a + bi$

يطلق على a الجزء الحقيقى من العدد المركب a + bi

يطلق على b الجزء التخيلى من العدد المركب a + bi

واذا كان b = 0 فى العدد المركب a + bi فان العدد يكون حقيقيا .

اما اذا كانت a = 0 فى العدد المركب a + bi فان العـدد يكون تخيليا صرفا .

تعريف ١١ ـ ١ ـ ٨ العدد المرافق :

يقال ان العدد a — ib هو عدد مرافق للعـدد المركب a + ib فمثلا العدد 1 + i هو عدد مرافق للعدد 1 — i والعدد المرافق للعدد « 5 » هو العدد « 5 » نفسه بينما العدد المرافق للعدد (3 i) هو العدد (—3 i) .

والصورة الأخيرة $a + bi$ تساعد كثيرا فى العمليات الجبرية . مع العلم بأن $i^2 = -1$ وسنسوق الآن بعض الأمثلة على العمليات الجبرية مستخدمين هذه الصورة .

امثلة محلولة : ١١ ـ ١ ـ ٨

(أ) اذا كان $a + 2i = 3 + bi$ فأوجد قيمتى a, b

من تعريف التساوى فان الجزئين الحقيقيين يجب ان يكونا متساويين وكذلك الجزئين التخيليين فنجد $a = 3, b = 2$

(ب) أوجد مجموع وباقى طرح العددين

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = 4 - i$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - i) = (2 + 4) + (3i - i)$$
$$= 6 + 2i$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 - i) = (2 - 4) + (3i + i)$$
$$= -2 + 4i$$

(جـ) أوجد مجموع وباقى طرح العددين المترافقين

$$4 + 3i , 4 - 3i$$

لنرمز للعدد $4 - 3i$ بالرمز « z » وللعدد المرافق $4 + 3i$ بالرمز « $\bar{z}$ »

$$\therefore \; z + \bar{z} = (4 + 3i) + (4 - 3i) = 8.$$

وهو عدد حقيقى صرف (وعموما فان حاصل جمع عـدد مركب ومرافقه هو عدد حقيقى صرف) بينما

$$z - \bar{z} = (4 + 3i) - (4 - 3i) = 6i$$

وهو عدد تخيلى صرف (وعموما فان باقى طرح أى عددين مترافقين يكون عددا تخيليا صرفا،تحقق من هذا !)

(د) أوجد حاصل ضرب العددين

$$z_1 = 3 - 4i, z_2 = 4 + 3i$$

$$z_1 . z_2 = (3 - 4i) . (4 + 3i)$$
$$= 3 \times 4 + 3 \times 3i - 4i \times 4 - 4i \times 3i$$
$$= 12 + 9i - 16i - 12i^2 = 12 - 7i - 12(-1)$$
$$= 12 + 12 - 7i = 24 - 7i$$

(هـ) اوجد حاصل ضرب $z = 3 + 4i$ مع مرافقه

$$\bar{z} = 3 - 4i$$
$$z . \bar{z} = (3 + 4i) . (3 - 4i)$$
$$= 3 \times 3 + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$
$$= 9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

وعموما فان حاصل ضرب أى عدد مركب فى مرافقه يكون عددا حقيقيا . ونترك الحالة العامة كتمرين اللقارىء .

(و) ضع خارج القسمة $z = \dfrac{2i}{1 + i}$ فى الصورة العادية للعدد المركب

يلزمنا هاهنا أن نتخلص من العدد المركب الموجود فى المقام بضرب البسط والمقام فى مرافق المقام فنحصل على عدد حقيقى فى المقام (باستخدام نتيجة المثال السابق).

$$z = \frac{2i}{1 + i} = \frac{2i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{2i(1 - i)}{1 - i + i - i^2}$$
$$= \frac{2i - 2i^2}{1 - i^2} = \frac{2i + 2}{2} = 1 + i$$

(ز) أوجد خارج قسمة $2 - 3i$ على $3 - 4i$

$$\therefore \frac{2 - 3i}{3 - 4i} = \frac{(2 - 3i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)}$$

$$= \frac{2 \times 3 + 2 \times 4i - 3i \times 3 - 3i \times 4i}{3 \times 3 + 3 \times 4i - 4i \times 3 - 4i \times 4i}$$

$$= \frac{6 + 8i - 9i - 12i^2}{9 + 12i - 12i - 16i^2} = \frac{6 + 8i - 9i + 12}{9 + 16}$$

$$= \frac{18 - i}{25} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25} i$$

(ح) من تعريف $i = \sqrt{-1}$ فانه يمكننا استنتاج

$$i^3 = i^2 . i = (-1) i = -i \qquad i^2 = -1,$$

$$i^4 = i^2 . i^2 = (-1)(-1) = 1$$

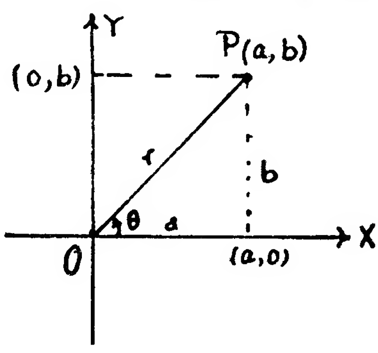
$$i^5 = i^4 . i = 1 . i = i$$

وعموما اذا كانت « n » عدد صحيح موجب فان :

$$i^{4n+k} = i^k$$

١١ ــ ٢ المستوى المركب والصورة القطبية للعدد المركب :

علمنا ان العدد المركب هو عبارة عن زوج مرتب من الأعداد الحقيقية . ومن ثم اذا اعتبرنا اى زوج مرتب (a, b) يمثل الاحداثيات الكرتيزية لنقطة فى مجموعة احداثيات كرتيزية متعامدة فان أى عدد مركب (a, b) تقابله نقطة ما فى مستوى الاحداثيات .



شكل ١١ ــ ٢ ــ ١ ــ المستوى المركب

واحداثيات هذه النقطة هى $x = a, y = b$ وبالعكس فأى نقطة (a, b) فى المستوى يقابلها عدد مركب $(a, b) = a + i b$ يسمى المستوى فى هذه الحالة بالمستوى المركب .

ونجد أنه فى المستوى المركب ، يمثل العدد الحقيقى a أى $a = a + 0 . i = (a, 0)$ بنقطة على المحور Ox . بينما يمثل العدد التخيلى $bi = 0 + bi = (0, b)$ بنقطة على محور y . وعليه تطلق التسميات الآتية :

يسمى محور « x » محور الأعداد الحقيقية Real numbers axis

يسمى محور « y » محور الأعداد التخيلية Imaginary nos. axis

١١ ــ ٢ ــ ١ الصورة القطبية Polar Representation :

يمكن تمثيل العدد المركب $(a, b) = a + bi$ بالمتجه المرسوم من نقطة الأصل « 0 » الى النقطة $P (a, b)$ وطول المتجه OP يرمز له بالرمز « r »

$$\therefore \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(انظر شكل ١١ ــ ٢ ــ ١) . ويسمى « r » بالقيمة المطلقة للعدد المركب $a + bi$ واتجاه المتجه يحدد بالزاوية « θ » المحصورة بين « OP » والاتجاه الموجب لمحور « x » . ويمكن تحديد « θ » من المعادلات الآتية :

$$a = r \cos \theta \ , \ b = r \sin \theta$$

وتسمى « θ » بسعة العدد المركب $a + bi$ ويرمز له بالرمز (Arg.....)

ومن ثم يمكننا كتابة العدد المركب فى الصورة

$$z = a + bi = r \cos \theta + (r \sin \theta) \, i$$

$$= r \, (\cos \theta + i \sin \theta)$$

وهى مايطلق عليها الصورة المثلثية أو القطبية للعدد المركب .

ونعلم أنه لأى عدد صحيح « k » فان .

$$\cos (\theta + 2 \pi k) = \cos \theta \ , \qquad \sin (\theta + 2 \pi k) = \sin \theta$$

وتبعا لذلك نحصل على المتطابقة

$$a + bi = r \{ \cos (\theta + 2 \pi k) + \sin (\theta + 2 \pi k) \}$$

حيث « k » اى عدد صحيح و $0 \leqslant \theta \leq 2\pi$ ويطلق على « r » القيمة المطلقة للعدد المركب « z » ويرمز لها بالرمز $|z|$ اى أن :

$$|z| = r , \text{Arg}(z) = \theta$$

مثال ١١ ـ ٢ ـ ١ :

ضع العدد المركب $-3 + 3i$ فى الصورة القطبية

هذا العدد يناظر النقطة $P(-3, 3)$ فمن التعريفات نجد أن :

$$\therefore\ a = -3,\ b = 3 \qquad \therefore\ r = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore\ a = -3 = r\cos\theta = 3\sqrt{2}\cos\theta \qquad \therefore\ \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ b = 3 = r\sin\theta = 3\sqrt{2}\sin\theta \qquad \therefore\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومن ثم نرى أن الزاوية « θ » هى :

$$\theta = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

$$\therefore\ -3 + 3i = 3\sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

ونترك للقارىء توقيع هذا العدد على المستوى المركب .

مثال ١١ ـ ٢ ـ ٢ :

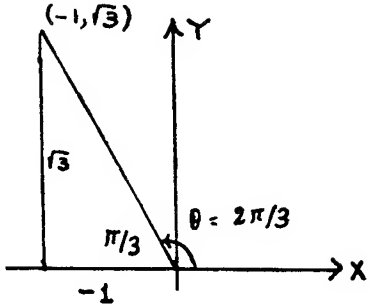
اكتب العدد المركب $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ فى صورته القطبية

الحـل :

من تعريف القيمة العددية والسعة نجد :

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



شكل ١١ — ٢ — ٢

ومن ثم يتبين أن سعة العدد « θ » هى :

$$\theta = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

$$\therefore \quad z = 2(\cos 120^\circ + (\sin 120^\circ)\, i).$$

والعدد موقع فى الشـــــكل ١١ — ٢ — ٢

مثال ١١ — ٢ — ٣ :

اكتب العدد المركب $z = 8\,(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$ فى الصورة $a + bi$.

المطلوب الآن هو الحالة العكسية للمثالين السابقين فنجد أن :

$$\therefore \quad a = 8 \cos 330^\circ = 8 \cos (360^\circ - 30^\circ) = 8 \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$$

$$b = 8 \sin 330^\circ = 8 \sin (360^\circ - 30^\circ) = -8 \sin 30^\circ = -4$$

ومن ثم يكون العدد « z » هو :

$$z = 4\sqrt{3} - 4i$$

ولنترك للقارىء رسم هذا العدد على المستوى المركب .

١١ — ٢ — ٢ استخدام الصورة القطبية فى عمليات الضرب والقسمة :

يمكن استخدام الصورة القطبية استخداما جيدا فى عمليات الضرب والقسمة وستكون هذه الصورة مفيدة جدا فى ايجاد الجذور كما سيظهر فى البند المقبل .

(أ) حاصل الضرب :

نفرض أن :

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \;,\; z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

عددان مركبان فنجد أن :

$$z . z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \;.\; r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \{ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$+ i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \}$$

$$= r_1 r_2 \{ \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2) \}$$

ومن ثم نجد أن القيمة المطلقة لحاصل ضرب عددين = القيمة المطلقة للعدد الأول × القيمة المطلقة للعدد الثانى (لنترك للقارىء التأكد من ذلك) بينما نرى ان سعة العدد الناتج هى عبارة عن مجموع سعتى العددين .

مثال ١١ ـ ٢ ـ ٣ :

أوجد حاصل ضرب العددين

$$z_1 = 3 (\cos 120 + i \sin 120) \;,\; z_2 = 2 (\cos 60 + i \sin 60^\circ)$$

الحـــل :

بتطبيق النتيجة السابقة نجد أن :

$$Z_1 . z_2 = 3 \times 2 (\cos (120 + 60) + i \sin (120 + 60))$$

$$= 6 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 6 (-1 + i \times 0) = -6$$

(ب) خارج القسمة :

عند قسمة العددين z_1/z_2 نجد أن :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)}$$

فبالضرب فى $\dfrac{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2}{\cos \theta_2 - i \sin \theta_2}$ واستخدام خواص الدوال المثلثية نحصل على التالى :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2) \}$$

من هذه الصورة نرى أن القيمة المطلقة للعدد z_1/z_2 هى عبارة عن خارج قسمة القيمتين المطلقتين r_1/r_2 بينما نجد أن :

$$\text{Arg } (z_1/z_2) = \text{Arg } (z_1) - \text{Arg } (z_2).$$

مثال ١١ ـ ٢ ـ ٣ :

أوجد خارج القسمة

$$8 (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) \div 2 (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

باستخدام النتيجة السابقة نرى أن خارج القسمة عبارة عن :

$$= \frac{8}{2} \{ \cos (75 - 15) + i \sin (75 - 15) \}$$

$$A = 4 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 4 (\tfrac{1}{2} + i \tfrac{1}{2} \sqrt{3})$$

$$= 2 + 2 \sqrt{3}\, i$$

مثال ١١ ـ ٢ ـ ٤ :

أوجد خارج القسمة $(1 - i) \div (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, i)$

يمكن استخدام احدى طريقتين : الطريقة الأولى ـ نحول العددين الى الصورة القطبية

$$1 - i = \sqrt{2} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

$$-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, i = 1 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$$

$$\therefore \frac{1 - i}{-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, i} = \frac{\sqrt{2}}{1} \frac{(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)}{(\cos 240 + i \sin 240)} =$$

$$= \sqrt{2} (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$$

اما الطريقة الثانية فتتلخص فى الضرب فى مرافق المقام بالضرب فى المقدار

$$\{-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\} / \{-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\}$$

ثم بعد ذلك نفصل الحقيقى والتخيلى . ولنترك هذه الطريقة للقارىء

١١ ــ ٣ قوى وجذور الأعداد :

سنتعرض فى هذا البند لقوى الأعداد المركبة وجذورها . فلنفرض أن

$z = a + i b$ او $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

فنجد أن :

$$z^2 = z . z = r(\cos\theta\ r\ i\ \text{sio}\ \theta) . r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

فحسب قاعدة الضرب $= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

بل انه يمكننا كتابة $z^3 = z . z^2$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) . r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

وحسب قاعدة الضرب السابقة نرى أن الناتج هو :

$$z^3 = r^2(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

ويمكننا اثبات أن : $z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

بل انه يمكننا تلخيص هذه النتائج فى النظرية التالية :

نظرية ١١ ــ ٣ ــ ١ (نظرية دى موافر) :

اذا كانت « n » أى عدد صحيح موجب فان :

$$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n\{\cos n\theta + i\sin n\theta\}$$

وتسمى هذه النظرية بنظرية دى موافر De Moivre's Theorem

ولاثبات هذه النظرية يستخدم قانون الاستنتاج الرياضى

ويلاحظ أن هذه النظرية صحيحة كذلك عندما $n = 0$ او أى عدد صحيح سالب .

مثال ١١ ــ ٣ ــ ١ :

ماهى قيمة z^6 حيث $z = 1 - i$?

الحــل :

نضع $z = 1 - i$ فى الصيغة القطبية وهى :

$$z = \sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

$$\therefore \quad z^6 = \{\sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)\}^6$$

وباستخدام النظرية السابقة

$$\therefore \quad z^6 = (\sqrt{2})^6\,(\cos (6 \times 315^\circ) + i \sin (6 \times 315^\circ))$$

$$= 8\,(\cos 1890^\circ + i \sin 1890^\circ)$$

$$= 8\,(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 8\,i$$

وسنعرف الجذر النونى (nth root) لعدد مركب كالآتى :

تعريف ١١ ـ ٣ ـ ١ :

اذا كانت « n » عدد صحيح موجب فان $p\,(\cos \theta + i \sin \theta)$ يكون جذرا نونيا للعدد المركب $q\,(\cos \phi + i \sin \phi)$ اذا كان واذا كان فقط

$$\{p\,(\cos \theta + i \sin \theta)\}^n = q\,(\cos \phi + i \sin \phi)$$

اى أن :

$$q\,(\cos \phi + i \sin \phi) = p^n\,(\cos n\,\theta + i \sin n\,\theta)$$

وذلك باستخدام نظرية دى موافر

وكما تعرفنا من قبل على شرط تساوى عددين مركبين ، فان الجزء الحقيقى للعدد الأول يجب أن يساوى الجزء الحقيقى للعدد الثانى . ويشترط نفس الشرط بالنسبة للجزء التخيلى

$$\therefore \quad q \cos \phi = p^n \cos n\,\theta \; ; \quad q \sin \phi = p^n \sin n\,\theta$$

وبتربيع طرفى كل معادلة من المعادلتين السابقتين وجمعهما نحصل على :

$$q^2\,(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = p^{2n}\,(\sin^2 n\,\theta + \cos^2 n\,\theta)$$

$$\therefore \quad q^2 = p^{2n} \qquad \therefore \quad q = p^n \qquad \therefore \quad p = \sqrt[n]{q}$$

وحيث أن « q » موجبة فان « p » هى الجذر النونى الأساسى للعدد « q »

وكذلك فان :

$$\cos \phi = \cos n\theta ,$$
$$\sin \phi = \sin n\theta .$$

وعليه فان الزاوية « ϕ » تساوى $n\theta$ أو تختلف عنها بمضاعفات 2π

ومنها نجد أن $\therefore \theta = \dfrac{\phi + 2\pi k}{n}$ $\quad \therefore n\theta = \phi + 2\pi k$

حيث « k » تأخذ فقط الأعداد

$$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, (n - 1)$$

ومما سبق نصل **للنتيجة الآتية** :

الجذور النونية للعدد المركب $p(\cos\phi + i\sin\phi)$ متساوية فى القيمة المطلقة « q » ولكن سعاتها هى $\dfrac{\phi + 2\pi k}{n}$ حيث

$$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, (n - 1)$$

مثال ١١ ـ ٣ ـ ٢ :

أوجد مايلى :

(أ) الجذور التربيعية للواحد الصحيح .

(ب) الجذور التربيعية للعدد (ـ ١) .

(جـ) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح .

الحـــل :

(أ) نكتب العدد (١) فى الصورة القطبية

$$z = 1 = r(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad \therefore r = 1$$
$$\cos\phi = 1 , \quad \sin\phi = 0 \qquad \therefore \phi = 0$$

وتصبح الجذور التربيعية للواحد الصحيح هى :

$$z_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k$$

حيث $k = 0, 1,$ $\theta_k = \dfrac{0 + 2\pi k}{2}$

وعند $k = 0$ نجد $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

وعند $k = 1$ نجد $z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

(ب) بنفس الطريقة السابقة نجد :

$$z = -1 = (\cos \pi + i \sin \pi)$$

والجذران التربيعيان يقابلان السعتين

$$\theta_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2} \qquad k = 0, 1$$

ولهما القيمة المطلقة الواحد الصحيح

وعند $k = 0$ نجد $z_0 = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i$

وعند $k = 1$ نجد $z_1 = \cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2 = -i$

(جـ) بتطبيق ماسبق نرى مايلى :

$$z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

وجذورها التكعيبية لها القيمة المطلقة الواحد الصحيح وتقابل السعات $\theta_k = \dfrac{0 + 2\pi k}{3}$ حيث $k = 0, 1, 2$

ومن ثم نجد :

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$z_1 = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3 = -\tfrac{1}{2} + i (\tfrac{1}{2}) \sqrt{3}$$

$$z_2 = \cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3 = -\tfrac{1}{2} - i (\tfrac{1}{2}) \sqrt{3}$$

يطلق على الجذر z_1 الرمز ω بينما يرمز للجذر z_2 بالرمز ω^2 وبسهولة يمكن اثبات أن ω^2 هى العدد المرافق للعدد ω وكذلك نثبت $1 + \omega + \omega^2 = 0$, $\omega^3 = 1$,

مثال ١١ ـ ٣ ـ ٢ :

أوجد :

$$z = \sqrt[3]{27\,(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}$$

الحـل :

$$z = \sqrt[3]{27\,(\cos 60 + i \sin 60)}$$

$$= \sqrt[3]{27}\,.\,(\cos \frac{60 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{60 + 2\pi k}{3})$$

$$= 3 \{ \cos (20^\circ + 2\pi/3\, k) + i \sin (20 + 2\pi/3\, k) \}$$

حيث $k = 0, 1, 2.$

بأخذ $k = 0$ فان $z_0 = 3\,(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$

بأخذ $k = 1$ فان

$z_1 = 3\,(\cos (20^\circ + 120^\circ) + i \sin (140^\circ))$

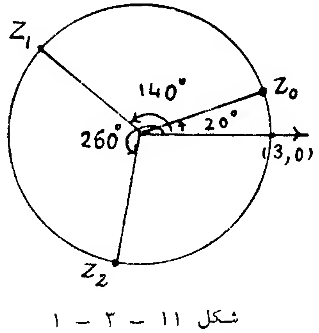
بأخذ $k = 2$ فان $z_2 = 3\,(\cos (20^\circ + 240^\circ) + i \sin 260^\circ)$

ونلاحظ اننا لو أخذنا $k = 3$ فاننا نجد :

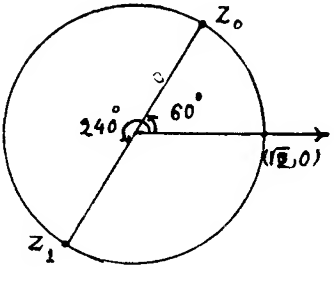
$z_3 = 3\,(\cos (20 + 360^\circ) + i \sin (20 + 360^\circ))$

$= 3 \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) = z_0$

أى أن للمسألة ثلاثة جذور فقط متباينة ويمكن تمثيلها كما فى الشكل ١١ ـ ٣ ـ ١



شكل ١١ ـ ٣ ـ ١



شكل ١١ ـ ٣ ـ ٢

مثال ١١ ـ ٣ ـ ٢ :

اوجد $\sqrt{-1 + \sqrt{3}\,i}$ وضع الجذر فى الصورة الكرتيزية $(a + bi)$

الحـل :

حيث ان :

$$-1 + \sqrt{3}\,i = 2\,(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

فعليه نجد :

$$\therefore \sqrt{-1 + \sqrt{3}\,i} = \sqrt{2}\,(\cos \frac{120 + 2\pi k}{3}$$

$$+ i \sin \frac{120 + 2\pi k}{2})$$

حيث $k = 0 , 1$. فعند $k = 0$ نحصل على

$$z_0 = (2)^{\frac{1}{2}}\,(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \sqrt{2}\,(\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\,i$$

وعند $k = 1$

$$z_1 = \sqrt{2}\,(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\,i$$

انظر الجذرين فى شكل ١١ ـ ٣ ـ ٢

١١ ـ ٤ حلول معادلات الدرجة الثالثة :

تعرضنا فى ثنايا الباب الثانى لجذور المعادلات ولكن كان الاهتمام مركزا على الجذور التى تنتمى الى فئة الاعداد الحقيقية ، ولقد ظهر هذا فى حلول معادلات الدرجة الثانية (او البحث عن اصفار دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية) . وفى دراسة الأعداد المركبة تعرضنا لجذور بعض المعادلات البسيطة وخلصنا الى حساب جذور فى صورة أعداد مركبة. فى هذا الفصل سنحاول أن نتعرض للطرق المختلفة لحل معادلات الدرجة الثالثة . ولنا أن ننبه من البداية أن الجذور تنتمى الى فئة الأعداد المركبة عموما . والصورة العامة لمعادلة الدرجة الثالثة هى :

$$f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c = 0 \qquad \ldots. \quad (1)$$

١١ ـ ٤ ـ ١ المعادلة المختزلة :

على أنه يمكننا تبسيط هذه المعادلة الى صورة يسهل التعامل معها بحيث يتلاشى معامل x^2 فى المعادلة الجديدة وذلك بوضع $x = y + k$ فتصير المعادلة فى الصورة .

$$\therefore \quad f(x) = (y + k)^3 + a (y + k)^2 + b (y + k) + c = 0$$

$$= y^3 + y^2 (3 k + a) + y (3 k^2 + 2 a k + b) + + (k^3 + a k^2 + bk + c)$$

فاذا اخترنا $k = - a/3$ فاننا نحصل على المعادلة المحولة $x = y - a/3$,

$$y^3 + py + q = 0$$

فبالعويض عن k فى

$$p = 3 k^2 + 2 ak + b , q = k^3 + a k^2 + bk + c$$

نجد : $p = b - a^2/3 , q = c - ba/3 + 2a^3 /27$.

يطلق على هذه المعادلة (المعادلة المختزلة)

مثال ١١ ـ ٤ ـ ١ :

اختزل معامل x^2 فى المعادلة $x^3 + 3 x^2 + 4 = 0$

الحـل :

نضع $x = y + k$ فنجد :

$$(y + k)^3 + 3 (y + k)^2 + 4 = 0$$

$$y^3 + y^2 (3k + 3) + y (3k^2 + 6k) + k^3 + 3k^2 + 4 = 0$$

فاذا وضعنا $3k + 3 = 0$ فنجد $k = -1$ فيتلاشى معامل y^2
ويصـــبح معـــامل « y » هو

$$3k^2 + 6k = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3$$

بينما الحد المطلق

$$k^3 + 3k^2 + 4 = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4 = 6$$

وتصبح المعادلة الجديدة هى :

$$y^3 - 3y + 6 = 0$$

١١ ــ ٤ ــ ٢ طريقة كاردان لحل معادلة الدرجة الثالثة :

لننظر الآن الى المعادلة

$$f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c = 0 \qquad (1)$$

هذه المعادلة يمكن تحويلها الى الصـــورة المختزلة وذلك بوضـــع $y = x - a/3$ فنحصل على :

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (2)$$

حيث $p = b - a^2/3\,,\quad q = c - ba/3 + 2a^3/27$

تتلخص طريقة كاردان فى فرض حل للمعادلة المختزلة ثم محـــاولة ايجاد هذا الحل . وسنسرد هذه الطريقة فيما يلى :

نفرض أن الحل فى الصورة $y = u + v$ حيث u , v مجهولتان فتصير المعادلة (2) كما يلى :

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

وبفك المكعب نجد :

$$u^3 + v^3 + (p + 3uv)(u + v) + q = 0 \qquad (3)$$

وهذا هو الشرط . وكما نرى فهو شرط واحد على مجهولين لذلك نضع شرطا آخرا على u , v وهو ان تحققا

$$p + 3uv = 0 \qquad (4)$$

ومن ثم نجد أن (3) مع (4) تصبح

$$u^3 + v^3 = -q \quad , \qquad uv = -\frac{p}{3}$$

وبتكعيب المقدار الأخير نجد :

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

يمكننا الآن النظر الى u^3, v^3 كجذرين مجموعهمـــــا $(-q)$ وحاصل ضربهما $(-p^3/27)$ فيكون هذان الجذران هما جذرى معـادلة الدرجة الثانية .

$$t^2 + q\,t - \frac{p^3}{27} = 0$$

والجذران هما :

$$A = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad (5)$$

$$B = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad (6)$$

والآن يلزمنا معرفة الجذور الثلاثة .

فكما عرفنا من الباب السابق فنجد ان جذور المعادلة (5) هى :

$u = \sqrt[3]{A}\,,\quad u = \omega \sqrt[3]{A}\,,\quad u = \omega^2 (\sqrt[3]{A})$

حيث $(1, \omega, \omega^2)$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

$$(\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\,,\quad \omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}).$$

بينما نجد أن جذور المعادلة (6) هى :

$v = \sqrt[3]{B}\,,\quad v = \omega \sqrt[3]{B}\,,\quad v = \omega^2 \sqrt[3]{B}.$

ولكن يجب علينا أختيار التركيبة المطلوبة من u, v . وهذه التركيبة يجب أن تحقق الشرط (4) فاذا اخترنا

$$\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = -p/3 .$$

فنجد ان التركيبة يجب أن تكون كما يلى :

$$u = \sqrt[3]{A} \quad , \quad v = \sqrt[3]{B}$$

$$u = \omega (\sqrt[3]{A}) \quad , \quad v = \omega^2 (\sqrt[3]{B})$$

$$u = \omega^2 (\sqrt[3]{A}) \quad , \quad v = \omega (\sqrt[3]{B})$$

ومن ثم تكون حلول المعادلة المختزلة $y^3 + p y + q = 0$ هى :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \\ y_2 &= \sqrt[3]{A}\omega + \sqrt[3]{B}\,\omega^2 \\ y_3 &= \sqrt[3]{A}\,\omega^2 + \sqrt[3]{B}\,\omega \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

حيث : $\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = -\, p/3$

وحيث

$$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} ,$$

$$B = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

١١ ــ ٤ ــ ٢ طبيعة الجذور :

قبل أن نتعرض لبعض الأمثلة سنناقش طبيعة الجذور ومتى تكون حقيقية ومتى تكون مركبة .

نفرض أن q , p حقيقيان وننظر الى المميز

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} .$$

فهناك ثلاث حالات لهذا المميز

الحالة الأولى : المميز موجبا :

اذا كان المميز موجبا اى ان $0 < \Delta$ ومن ثم يكون $\sqrt{\Delta}$ حقيقيا ومنه يتضح أن A, B حقيقيان . ويمكننا اخـــذ $\sqrt[3]{A}$ على أساس أنه الجذر التكعيبى الحقيقى للعدد الحقيقى A وحيث أن « p » حقيقية فيكون $\sqrt[3]{B}$ حقيقا لأنه يحقق

$$\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3} .$$

ومن ثم فان المعادلة المختزلة (2) لها الجذور الآتية :

(أ) الجذر الحقيقى $\quad y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$

(ب) الجذر المركب $\quad y_2 = \omega \sqrt[3]{A} + \omega^2 \sqrt[3]{B}$

$$= -\frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{2} + i \sqrt{3}/2 \; (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})$$

(جـ) الجذر المركب المرافق

$$y_3 = \omega^2 \sqrt[3]{A} + \omega \sqrt[3]{B}$$

$$= -\tfrac{1}{2} (\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) - i \sqrt{3}/2 \; (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}).$$

مثال ١١ ـ ٤ ـ ٢ :

استخدم طريقة كاردان فى حل المعادلة

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$$

الحـل :

نختزل أولا هذه المعادلة بأن نضع

$$x = y - a/3 = (y + 1)$$

فتصبح المعادلة هى :

$$(y + 1)^3 - 3 (y + 1)^2 + (y + 1) - 3 = 0$$

$$y^3 - 2y - 4 = 0 \qquad \therefore \; p = -2, \; q = -4$$

فيكون المميز $\Delta = (9/2)^2 + (p/3)^3 = (-4/2)^2 + (-2/3)^3$

$$= 4 - \frac{8}{27} = + \frac{100}{27}$$

وعليه نجد :

$$A = +2 + (10/9)\sqrt{3}, \quad B = 2 - (10/9)\sqrt{3}$$

وتكون الجذور للمعادلة المختزلة هى :

$$y_1 = \sqrt[3]{2 + (10/9)\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - (10/9)\sqrt{3}}$$

$$y_2 = -\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{2 + (10/9)\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - (10/9)\sqrt{3}}\right\}$$

$$+ i\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\sqrt[3]{2 + (10/9)\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2 - (10/9)\sqrt{3}}\right\}$$

$$y_3 = \overline{y_2}$$

وعليه نجد ان جذور المعادلة الأصلية هى :

$$x_1 = y_1 + 1, \quad x_2 = y_2 + 1, \quad x_3 = y_3 + 1 = \overline{x_2}$$

ويمكن التأكد من ان $y_1 = 2$ ومن ثم نجد ان :

$$x_1 = 3, \quad x_2 = i, \quad x_3 = -i.$$

الحالة الثانية : المميز صفرا :

اذا كان المميز $\Delta = 0$ وفى هذه الحالة يتساوى المقداران A, B (وحيث أن p, q حقيقيان فان A, B حقيقيان أيضا) ومن ثم تكون الجذور كلها حقيقية واثنان متساويان . اى ان للمعادلة جذر مكرر .

مثال ١١ ـ ٤ ـ ٣ :

استخدم طريقة كاردان فى حل المعادلة $y^3 - 3y + 2 = 0$

الحـل :

هذه معادلة مختزلة وفيها $p = -3$ ، $q = 2$ فنجد المميز

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3 = (2/2)^2 + (-3/3)^3 = 0$$

ومن ثم نجد :

$$A = B = -\frac{q}{2} = -1$$

ونأخذ $\sqrt[3]{A} = -1 = \sqrt[3]{B}$

وتكون الجذور هى : $y_1 = -2 \;,\; y_2 = y_3 = 1.$

الحالة الثالثة : المميز سالبا :

اذا كان المميز سالبا اى أن $\Delta < 0$ فعليه يكون $\sqrt{\Delta}$ تخيليا ومن ثم نجد ان كلا من A , B عددان مركبان مترافقان .

وعليه نجد ان $\sqrt[3]{A}$ هو عدد مركب أيضـــا ويتطلب الشرط $\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} = -p/3$ أن يكون العدد $\sqrt[3]{B}$. مركبا أيضا وهو مرافق $\sqrt[3]{A}$. أى انه يمكننا كتابة :

$$\sqrt[3]{A} = \alpha + i\,\beta \qquad\qquad \sqrt[3]{B} = \alpha - i\,\beta$$

ومن ثم تكون الجذور الثلاثة حقيقية **ومختلفة** وذلك لأن :

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = 2\alpha$$

$$y_2 = -\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}\right)$$

$$= -\alpha - \sqrt{3}\,\beta$$

بينما نجد أن :

$$y_3 = -\alpha + \sqrt{3}\,\beta.$$

مثال ١١ ــ ٤ ــ ٤ :

حل المعادلة $x^3 - 6x + 4 = 0$

الحــل :

هذه معادلة لاتحتوى على x^2 . فيها $p = -6,\; q = 4$ فنجد ان :

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3 = (4/2)^2 + (-6/2)^3 = -4$$

وعليه نجد :

$$A = -2 + 2i \;,\; B = -2 - 2i$$

وتكون الجذور هى :

$$y_1 = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$$

وهو حقيقى

$$y_2 = -\frac{1}{2}\{\sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}\} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\{\sqrt[3]{-2+2i} - \sqrt[3]{-2-2i}\}$$

وهو حقيقى كذلك

$$y_3 = -\frac{1}{2}\{\sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}\} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\{\sqrt[3]{-2+2i} - \sqrt[3]{-2-2i}\}$$

١١ — ٥ — حلول معادلات الدرجة الرابعة :

فى هذا الفصل سنتعرض لطريقة حل معادلات الدرجة الرابعة التى يطلق عليها طريقة فيرارى . وتتلخص هذه الطريقة فيما يلى :

يمكننا كتابة معادلة الدرجة الرابعة فى الصورة

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0 \qquad (1)$$

ويمكن وضعها كما يلى :

$$x^4 + a x^3 = - b x^2 - c x - d$$

فباضافة $\frac{a^2}{4} x^2$ الى طرفى المعادلة بحيث يمكننا كتابتها فى الصورة

$$(x^2 + \frac{a}{2} x)^2 = (\frac{a^2}{4} - b) x^2 - c x - d \qquad (2)$$

وهى معادلة مكافئة للمعادلة (١) . فاذا كان الطرف الايمن للمعادلة (٢) مربعا كاملا كان الحل سهلا اذ أنه يكفى أخذ الجذر التربيعى للطرفين فتتكون معادلتين من الدرجة الثانية يمكن حلهما بسهولة . ولكن عموما فان

الطرف الأيمن ليس بالضرورى أن يكوون مربعا كاملا . وتتلخص طريقة فبرارى فى فرض مجهول « y » واضافة المقدار

$$y\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right) + \frac{y^2}{4}$$

الى طرف المعادلة لكى يصبح الطرف الأيسر مربعا كاملا وتتحول المعادلة (٢) الى

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \tfrac{1}{2}ay\right)x + \left(-d + \tfrac{1}{4}y^2\right) \quad (3)$$

ويتحدد المجهول « y » بتطبيق الشرط ان الطرف الأيمن للمعادلة (3) يكون مربعا كاملا وهذا الطرف يمكن كتابته فى الصورة

$$A x^2 + B x + C$$

ولكن يكون هذا مربعا كاملا فلابد وان :

$$B^2 = 4\,AC \quad (4)$$

وهذا الشرط الاخير هو :

$$\left(\tfrac{1}{2}ay - c\right)^2 = 4\left(y + a^2/4 - b\right)\left(-d + \tfrac{1}{4}y^2\right).$$

وبفكها نحصل على معادلة الدرجة الثالثة

$$y^3 - (b + a^2/4)\,y^2 + (ac - 4d)\,y + 4bd - a^2 d - c^2 = 0 \quad (5)$$

تسمى هذه **بالمعادلة المساعدة** . واى جذر من جذور هـذه المعادلة يمكن اختياره للتعويض فى الطرف الأيمن والطرف الأيسر للمعادلة (3) ويصبح الطرف الأيمن فى هذه الحالة فى الصورة $(ex + f)^2$

وتتحول المعادلة (٣) الى الصورة

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = (ex + f)^2$$

التى يمكن تحويلها الى المعادلتين

$$x^2 + \frac{a}{2} x + \frac{y}{2} = ex + f \qquad (6a)$$

$$x^2 + \frac{a}{2} x + \frac{y}{2} = - ex - f \qquad (6b)$$

والمعادلتان (٦) عبارة عن معادلتين كل واحدة منهما من الدرجة الثانية فبحلهما تحصل على الجذور الأربع المطلوبة .

مثال ١١ ـ ٥ ـ ١ :

استخدم طريقة فيرارى فى حل المعادلة

$$x^4 + 4x - 1 = 0$$

الحـل :

فى هذه المعادلة نجد أن :

$$a = 0 , b = 0 , c = 4 , d = -1$$

وبالتعويض فى معاملات المعادلة (٥) المساعدة

$$y^3 - (b + a^2/4) y^2 + (ac - 4d) y + 4bd - a^2 d - c^2 = 0$$

فتصبح المعادلة المساعدة

$$y^3 + 4y - 16 = 0 .$$

ونلاحظ أن $y = 2$ هو احد جذور هذه المعادلة .

وتصبح معادلة الدرجة الرابعة كما يلى (حيث $a = 0$)

$$(x^2 + y/2)^2 = - 4x + 1 + x^2 y + y^2/4$$

$$\therefore \quad (x^2 + 1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$$

وتصبح المعادلتان هما :

$$x^2 + 1 = \sqrt{2} (x - 1) , x^2 + 1 = - \sqrt{2} (x - 1)$$

وجذور هاتين المعادلتين هى :

$$\frac{+\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4(1+\sqrt{2})}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}$$

و

$$\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4(1-\sqrt{2})}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$$

وهى الجذور الأربع للمعادلة .

تمـــارين

١ ـ اوجد كل من x , y فى كل من المعادلات الآتية :

1) $(8x, 3y) = (16, 6)$ 2) $2x + 3y = 4 + 6i$

3) $(4x - 8) = (8 - 2y)i$ 4) $x^2 + y^2 i = 4$

5) $(x + 2) + (-3y + 12)i = -x + yi$

٢ ـ اجر العمليات الآتية وحول الى الصورة $a + bi$

1) $(5, -3) + (-2, 5)$ 2) $(1, -3) - (-2, 5)$

3) $(3 + 5i) + (7 + 12i)$

4) $(3 + 2i) - (-7 - 4i) + (8 + 2i)$

5) $\sqrt{-25} + \sqrt{-4} + 6i$ 6) $(3, 2)\ (5, -2)$

7) $(3 + i) . (5 + 2i)$ 8) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$

9) $\dfrac{3}{i^2 - i^3}$ 10) $\dfrac{(1 + i)^2}{(3 - i)^2}$

٣ ـ عين النقط فى المستوى التى تقابل الأعداد المركبة الآتية ثم حول الى الصورة القطبية

1) $1 + i$ 2) $-1 + i$ 3) $5 + 12i$

4) $\dfrac{1}{i}$ 5) $\dfrac{3}{-i}$ 6) $\dfrac{2 - i}{5 + 2i} + \dfrac{3 + i}{1 - i}$

٤ ـ ضع كل من الأعداد المركبة الآتية فى الصورة الكرتيزية $a + bi$

1) $2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$ 2) $5(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

3) $2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ 4) $6(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$

5) $3(\cos 210 + i \sin 210)$ 6) $9(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$

٥ ـ اجر عمليات الضرب أو القسمة ثم ضع الناتج فى الصـــورة الكرتيزية

1) $5\ (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)\ .\ 3\ (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

2) $3\ (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)\ .\ 8\ (\cos 120 + i \sin 120^\circ)$

3) $\{\ 2\ (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)\ \}^2$

4) $36\ (\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) \div (12\ .\ (\cos \pi/6 + i \sin \pi/6)$

5) $(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) \div 6\ (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$

٦ ـ احسب قيم مايلى مستخدما نظرية دى موافر ثم ضع الناتج فى الصورة الكرتيزية

1) $(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)^3$ 2) $(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)^5$

3) $(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^6$ 4) $(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)^{12}$

٧ ـ ضع الأعداد المركبة الآتية فى الصورة المثلثية (القطبية) ثم اجر العمليات المبينة

1) $(1 + i)^4$ 2) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

3) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6$ 4) $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)^{10}$

٨ ـ تستخدم نظرية دى موافر لاستنتاج المتطابقات المثلثية . فمثلا :

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^2$$
$$= \cos^2\theta + 2 i \sin\theta \cos\theta + i^2 \sin^2\theta$$
$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i\ (2 \cos\theta \sin\theta$$

ومنها نستنتج المتطابقات :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta\ ,\ \sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

والمطلوب الآن ايجاد :

1) $\cos 3\theta$, 2) $\sin 3\theta$, 3) $\cos 4\theta$

٩ ـ جد الجذور التالية

(أ) الجذور التكعيبية للعدد المركب $64 (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

(ب) الجذور الخمسة للعدد المركب -32

(جـ) الجذور التربيعية للعدد المركب $-16 i$

(د) الجذور التكعيبية للعدد المركب 1 (يطلق عليها $1, \omega, \omega^2$)

(هـ) الجذور التكعيبية للعدد المركب i

(و) جذور المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$

(ز) جذور المعادلة $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

(ح) جذور المعادلة $x^3 - 2 x^2 + 4 x - 8 = 0$

١٠ ـ حل معادلات الدرجة الثالثة الآتية :

1) $x^3 - 3 x^2 + 1 = 0$ 2) $x^3 + 3 x^2 - 3 = 0$

3) $x^3 + x^2 - 2 x - 1 = 0$ 4) $x^3 - 6 x + 2 = 0$

5) $x^3 + 6 x^2 + 10 x + 3 = 0$

6) $x^3 + x^2 - 4 x + 1 = 0$

7) $x^3 + 3 x^2 - 2 x - 3 = 0$

8) $x^3 + 6 x^2 + 8 x - 1 = 0$

9) $(x^2 - x + 1)^2 = 9 x^2 (x - 1)^2$ حل المعادلة بوضع $y = x - \frac{1}{x}$

١١ ـ حل معادلات الدرجة الرابعة الآتية مستخدما طريقة فيرارى

1) $x^4 - 8 x^2 - 4 x + 3 = 0$

2) $x^4 - 4 x^2 + x + 2 = 0$

3) $x^4 + x^3 - 5 x^2 + 2 = 0$

4) $2 x^4 + 5 x^3 - 8 x^2 - 17 x - 6 = 0$

5) $x^4 - 3 x^3 + 6 x - 2 = 0$

6) $x^4 - x^2 - 2 x - 1 = 0$

7) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 10x - 12 = 0$

8) $x^4 + 5x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$

١٢ ــ اثبت أن المقــدار $x = 2 \cos (2\pi/15)$ يحقق المعــادلة
$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$ وما هى الجذور الأخرى

١٣ ــ استخدم التعويض $y = x + i$ فى حل المعادلة

$$((x + 2)^2 + x^2)^3 = 8x^4 (x + 2)^2$$

الباب الثانى عشر

المحددات

DETERMINANTES

بند ١٢ ــ ١ مقدمة وتعريفات :

يمكن وضع المقدار الجبرى $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ فى الصورة $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ يطلق على هذه الصورة محدد من الرتبة الثانية وعناصره تكون مرصوصة فى صفين وعمودين كما هو واضح .

فمثلا :

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - 3 \times 5 = 28 - 15 = 13$$

وهناك محددات من رتب اعلى فمحدد الرتبة الثالثة يحتوى على عناصر مرصوصة فى ثلاثة اعمدة وثلاثة صفوف ومثال ذلك :

محدد الرتبة الثالثة المقابل $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ وسنحاول فيما يلى أن نوجد قيمته . وذلك بعد أن نعرف مايأتى :

تعريف ١٢ ــ ١ ــ ١ :

المحدد الذى رتبته « n » يحتوى على صفوف عددها « n » واعمدة عددها « n » كذلك .

اى ان رتبة المحدد هى عدد صفوفه او اعمدته .

تعريف ١٢ ــ ١ ــ ٢ :

المحيدد (Minor) لأى عنصر فىمحدد رتبته « n » هو محدد من الرتبة $(n - 1)$ ناتج من حذف العمود والصف الواقع فيه العنصر .

ففى المحدد التالى $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ يكون محيدد العنصر a_1 هو محدد الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

- بينما محيدد العنصر « b_2 » مثلا فى نفس المحدد هو محدد الرتبة الثانية

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

تعريف ١٢ ــ ١ ــ ٣ :

معامل (Cofactor) العنصر الذى يقع فى الصف الذى ترتيبه (i) والعمود الذى ترتيبه (j) فى اى محدد هو عبارة عن محيدد العنصر مضروبا فى الاشارة $(-1)^{i+j}$.

اى أن معامل العنصر « a_1 » الذى يقع فى الصــــف الأول والعمود الاول من المحدد السابق هو المحيدد نفسه

$$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

بينما معامل العنصر « b_1 » فى المحدد ذاته هو

$$(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

بينما نلاحظ ان معامل العنصر «c_1» فى نفس المحدد هو عبارة عن :

$$(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال ١٢ ــ ١ ــ ١ :

أوجد معامل العنصر (3) فى المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

الحــل :

حيث أن العنصر (3) يقع فى الصــــف الثالث والعمود الثانى فيكون معامله هو :

$$(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \times 2 - 7 \times 5) = 33$$

تعريف ١٢ ـ ١ جـ ٤ : مفكوك لابلاس للمحدد Laplace

قيمة المحدد الذى رتبته « n » حيث $n \geqslant 2$ هى مجموع حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول (مثلا) × معامله

اى أن لأى محدد من محدد الرتبة الثالثة مثلا :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

وذلك باستخدام تعريف المحدد من الرتبة الثانية . وسنسوق الآن مثالا عدديا :

مثال ١٢ ـ ١ ـ ٢ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-7) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (5 \times 3 - 4 \times 2) - 3 (1 \times 3 - 3 \times 4) - 7 (1 \times 2 - 5 \times 3)$$

$$= 2 (15 - 8) - 3 (3 - 12) - 7 (2 - 15)$$

$$= 14 + 27 + 91 = 132$$

وهذا التعريف السابق يطلق عليــه مفكوك لابلاس (Laplace) للمحدد الذى رتبته n $(n \geqslant 2)$ باستخدام عناصر الصف الأول .

نظرية ١٢ ـ ١ ـ ١ :

لا تتغير قيمة المحدد اذا طبق مفكوك لابلاس باستخدام عناصر اى صف او عمود .

مثال ١٢ ـ ١ ـ ٣ :

احسب قيمة المحدد

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

الحـل :

حسب النظرية السابقة يمكننا ان نستخدم اى صف أو عمود فباستخدام الصف الثالث

$$\therefore D = 0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$- 0\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (4 \times 3 - 2 \times 1) - 2\,(2 \times 3 - 5 \times 1) + 5\,(2 \times 2 - 4 \times 5)$$

$$= 10 - 2 - 80 = -72$$

بند ١٢ ــ ٢ خواص المحددات :

سنسوق فى هذا البند خواص مهمة للمحددات وسنثبتها بالنسبة لمحددات الرتبة الثانية مع أن تعميم الاثبات للمحددات من الرتب العليا ليس بالامر العسير .

الخاصية الاولى :

تبديل صفين (أو عمودين) متتاليين لمحدد يغير اشارة المحدد فقط . ولبرهنة ذلك نستخدم محددا من الرتبة الثانية .

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

فاذا بدلنا الصفين نجد :

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

الخاصية الثانية :

ابدال الصفوف مكان الأعمدة لايغير من قيمة المحدد .

فاذا نظرنا الى المحدد وابدلنا الصفوف مكان الأعمدة فنجد :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 = a_1b_2 - a_2b = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

الخاصية الثالثة :

اذا ضرب أى صف (أو عمود) لمحدد ما فى عدد $k \neq 0$ فان قيمة المحدد الناتج يساوى « k » مضروبا فى قيمة المحدد الأصلى .

فمثلا اذا ضربنا عناصر الصف الأول فى « k »

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\ a_1b_2 - k\ a_2b_1 = k\ (a_1b_2 - a_2b_1) = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

نتيجة :

العامل المشترك لجميع عناصر صف (أو عمود) لمحدد ما هو عامل مشترك للمحدد . وقيمة المحدد لاتتغير .

فمثلا :

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 5 - 8 \times 3 = -4 = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\ (5-6) = -4$$

الخاصية الرابعة :

اذا ضربت عناصر صف (أو عمود) فى عدد معين وجمعت على صف (أو عمود) آخر فان قيمة المحدد لاتتغير .

فمثلا :

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ولبرهنة ذلك :

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_1 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + ka_2)\, b_2 - a_2\, (b_1 + kb_2)$$

$$= a_1b_2 + ka_2b_2 - a_2b_1 - ka_2b_2$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1$$

وهو كما نعلم مفكوك المحدد الموجود فى الطرف الأيمن $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

وهذه الخاصية تستخدم لتحويل محدد الى محدد مكافىء اسهل فى فكه كما سنبين ذلك فى الأمثلة الآتية :

مثال ١٢ ـ ٢ ـ ١ :

احسب قيمة المحدد

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

الحـــل :

بضرب عناصر الصف الثالث فى (3) ثم اضافتها الى الصف الأول .
ثم بضرب الصف الثالث فى (2) ثم جمعه الى الصف الثانى نحصل على :

$$D = \begin{vmatrix} 1 + 3\times 5 & 3 + 3\,(-1) & 1 + 3 \times 3 \\ 4 + 2\times 5 & 2 + 2\,(-1) & 2 + 2 \times 3 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 10 \\ 14 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

وباستخدام العمود الثانى :

$$D = -(-1) \begin{vmatrix} 16 & 10 \\ 14 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -12 .$$

ولنترك للقارىء أن يفك المحدد مباشرة ويتأكد من القيمة

مثال ١٢ ـ ٢ ـ ٢ :

احسب قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

الحـــل :

بجمع العمود الثانى الى العمود الثالث وجمع ضعف العمود الثانى الى العمود الأول فنجد :

$$\therefore \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(1) \begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 47$$

وذلك بفك المحدد الأخير باستخدام الصف الأول

مثال ١٢ ـ ٢ ـ ٣ :

احسب قيمة المحدد

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحـــل :

الصف الثانى نطرح منه ضعف الأول والصف الثالث نطرح منه ثلاثة أمثال الصف الأول

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 1\,(2 + 14) = 16$$

مثال ١٢ ـ ٢ ـ ٤ :

أوجد قيمة « x » التى تحقق

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{vmatrix} = 0$$

الحـــل :

نطرح الصف الأول من الصف الثانى . وبطرح الصف الأول أيضا من الصف الثالث نحصل على :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & x^2-1 & x^4-1 \end{vmatrix} = (x-1)\ (x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \\ 0 & 1 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\ (x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ 1 & x^2+1 \end{vmatrix} = (x-1)\ (x^2-)\ \{\ (x^2+1) - x+1\ \}$$

$$= (x-1)\ (x^2-1)\ (x^2-x) = x\ (x-1)^2\ (x^2-1)$$

ومن ثم نرى أن $D = 0$ تعطى

$$x\ (x-1)^2\ (x^2-1) = 0$$

وقيم « x » التى تحقق هذه المعادلة هى :

$$x = 0,\ x = \pm 1$$

بند ١٢ ـ ٣ حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

تستخدم المحددات فى تســــهيل عدد من المسائل وكتطبيق لذلك نستخدم فى حل المعادلات الخطية الآنية فيما يعرف باسم قاعدة كرامر Cramer's Rule

فاذا فرضنا أن لدينا ثلاث معادلات خطية تحتوى على ثلاثة مجاهيل x, y, z كالآتى :

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

ونفرض أن « D » هو المحدد الذى عناصره هى معاملات المجاهيل x, y, z

$$\therefore\ D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وبضرب الطرفين فى « x » نحصل على :

$$xD = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فبضرب العمود الثانى فى « y » والعمود الثالث فى « z » وجمع الناتج على العمود الأول فنحصل على :

$$x\,D = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وباستخدام المعادلات (١) نجد أن :

$$x\,D = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ومنها نجد قيمة « x » عبارة عن :

$$x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وبالمثل نحصل على :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \ldots \quad (2)$$

بشرط أن $D \neq 0$. ونلاحظ أن قيمة كل من x, y, z عبارة عن كسر مقامه هو المحدد « D » المكونة عناصره من معاملات المجاهيل وبسطه عبارة عن محدد مثل المحدد « D » بعد استبدال معـاملات المجهول بالثوابت d_1, d_2, d_3 فى المعادلات .

مثال ١٢ ـ ٣ ـ ١ :

استخدم قاعدة كرامر لحل المعادلات الآتية :

$$2x + 3y - z = -1$$

$$x - 6y - 5z = 4$$

$$3x + 4y + 2z = 14$$

الحل :

نكون « D » فنجد انه :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -6 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -57 \neq 0$$

العمود الثانى+٣×الأول
العمود الثالث ـ الأول

$$\therefore \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & -5 \\ 14 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{-57} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -9 \\ 14 & 46 & -12 \end{vmatrix}}{-57}$$

$$= \frac{(-1)\ (-72 + 414)}{-57} = \frac{-342}{-57} = 6$$

وبالمثل :

العمودالأول+ضعفالثالث
العمود الثانى ـ الثالث

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 14 & 2 \end{vmatrix}}{-57} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -9 & 9 & -5 \\ 7 & 12 & 2 \end{vmatrix}}{-57}$$

$$= \frac{(-1)\ (-108 - 63)}{-57} = \frac{171}{-57} = -3$$

وكذلك :

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & 14 \end{vmatrix}}{-57}$$

العمود الأول + ضعف الثالث

العمود الثانى + ٣ × العمود الثالث

$$= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 9 & 6 & 4 \\ 31 & 46 & 14 \end{vmatrix}}{-57}$$

$$z = \frac{-1\ (9 \times 46 - 6 \times 31)}{-57} = \frac{-228}{-57} = 4$$

اى ان حل المعادلات الثلاثة هو :

$$x = 6\ ,\ y = -3\ ,\ z = 4$$

ويبقى بعد ذلك أن نذكر الحالات التى عندها يتلاشى D .

فاذا كانت $D = 0$ واى بسط فى المعادلات (1) لا يساوى صفر فان مجموعة المعادلات (2) ليس لها حل محدود .

اما اذا كانت $D = 0$ وكل بسط فى العلاقات (2) يساوى صفرا فان مجموعة المعادلات (1) قد يكون وقد لايكون لها حلا .

وهاتان الحالتان الأخيرتان لن نتعرض لحل مجموعات معـــادلاتها هاهنا .

تمــارين

١ ــ اوجد « x » التى تحقق المعادلات الآتية :

1) $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 0$

3) $\begin{vmatrix} x & x & -2 \\ 1 & x & -2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} = 0$

٢ ــ اثبت الخواص الموجودة فى بند ١٢ ــ ٢ فى حالة محــــددات الدرجة الثالثة .

٣ ــ قدم برهانا للخواص فى بند ١٢ ــ ٢ فى حالة المحدد الذى من درجة « n »

٤ ــ حل هذه المعادلات باستخدام المحددات :

1) $3x + 4y = 1,$
$5x + 2y = 11$

2) $3x + 2y = 2,$
$2x - 3y = 36$

3) $10x + 9y = 12,$
$8x + 2y = 2$

4) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{5}{2},$
$\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{5} = \dfrac{23}{5}$

5) $2(x + y) - 7(x - y) = 5$
$3(x + y) - 10(x - y) = 8$

6) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{8}{y} + 7 = 0$
$\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} - 4 = 0$

7) $x + y - z = 2$
$x + 2y + z = 7$
$3x - y + 2z = 12$

8) $2x - z - 2 = 0$
$x - y - 5 = 0$
$y - z + 6 = 0$

9) $x - 2y + z = 7$
$y + 2z = 1$
$2x + 3z = 4$

10) $x - 2y + 4z = -3$
$2x + y - 3z = 11$
$3x + y - 2z = 12$

11) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 4$
$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{3}{z} = -7$
$\frac{3}{x} - \frac{5}{y} + \frac{2}{z} = -5$

12) $-x + y + z + 2w = 2$
$5y - 4z + w = -2$
$3x + 2y - 3z = 0$
$2x + 2y - z + w = 7$

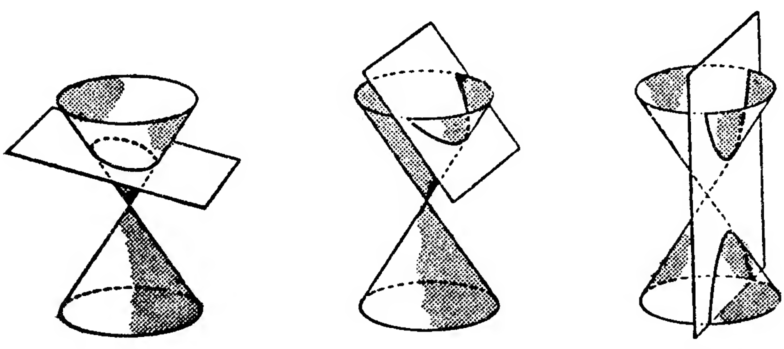
الباب الثالث عشر

الهندسة التحليلية

القطاعات المخروطية Conic Sections

١٣ ـ ١ مقدمة :

يطلق على مجموعة المنحنيات الناتجة من تقاطع مستوى مع مخروط بالقطاعات المخروطية . ولقد تناول الرياضيون الاغريق القدامى هذه المجموعة من المنحنيات بالدراسة وعرفوها باستخدام مفاهيم الهندسة الاقليدية والعلاقات بين نقط (يطلق عليها البؤرات Foci) وخطوط (يطلق عليها الأدلة Directrices) التى تحدد أشكال هذه المنحنيات . وهناك ثلاثة انواع مختلفة من هذه القطاعات : فاذا قطع المستوى جزءا واحدا فقط من جزئى مخروط قائم قطعا كاملا وكان مائلا على محور المخورط فيطلق على منحنى التقاطع اسم القطع الناقص "Ellipse" اما اذا كان المستوى عمودى على محور المخروط فيكون المنحنى دائرة . اما اذا لم يقطع المستوى جزءا قطعا كاملا ولم يقطع الجزء الآخر من المخروط على الاطلاق سمى المنحنى الناتج بالقطع المكافىء "Parabola" . واخيرا اذا قطع المستوى جزئى المخروط كان المنحنى الناتج هو القطع الزائد Hyperoda . انظر الشكل ١٣ ـ ١ ـ ١ حيث تظهر هذه القطاعات الثلاثة



شكل ١٣ ـ ١ ـ ١ القطاعات المخروطية

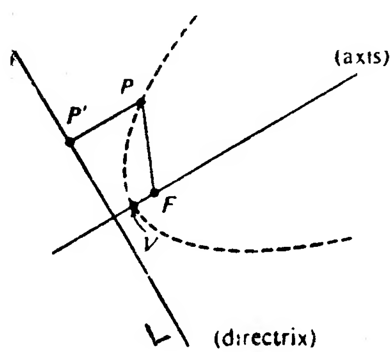
وهذه المجموعة من المنحنيات ذات أهمية خاصـــة فى الدراسات الفيزيائية والفلكية . اذ أن الأفلاك والمسارات الكوكبية عبارة عن قطاعات مخروطية . خصوصا القطع الناقص . أما مسار جسيم الفا المتصادم مع نواة ذرة هو عبارة عن قطع زائد . وسنناقش فيما يلى هـذه القطاعات ونبدأ بأبسطها .

١٣ ـ ٢ القطع المكافىء Parabola :

هذا المنحنى له تطبيقات عملية . اذ أن مسار مقذوف تحت تأثير عجلة الجاذبية مع اهمال مقاومة الهواء هو عبارة عن قطع مكافىء بينمـا تستخدم المرايا المكافئة فى التلسكوبات والأضواء الكاشفة

١٣ ـ ٢ ـ ١ تعريف :

مجموعة النقط الواقعة فى مستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة (البؤرة Focus) يساوى بعدها عن خط مستقيم فى المســـــتوى (الدليل Directrix) تكون منحنى القطع المكافىء .



شكل ١٣ ـ ٢ ـ ١ منحنى القطع المكافىء

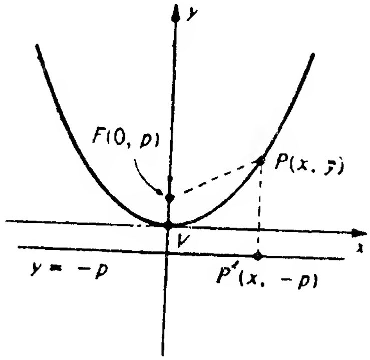
ولرسم هــذا المنحنى نتبع الآتى :

لنرمز للدليل وهــو الخط المســتقيم بالرمز « L » وللبؤرة بالرمز « F » (بعيدة عن الدليل) فحسب التعريف تقع النقطة « P » على منحنى القطـــع المكافىء اذا كانت FP = PP'

حيث « P' » هو موقع العمود الساقط من « P » على الدليل « L » ويظهر المنحنى فى الشكل ١٣ ـ ٢ ـ ١

يطلق على الخط المستقيم المار بالبؤرة وعمودى على الدليل بمحور القطع axis وعلى نقطة تقاطع المنحنى مع المحور « V » (وهى تقســم المسافة بين البؤرة والدليل) براس القطع Vertex .

١٣ ـ ٢ ـ ٢ بعض صور القطع المكافىء :



$x^2 = 4py$

منحنى القطع المكافىء
شكل ١٣ ـ ٢ ـ ٢

(أ) اذا كانت الراس عند نقطة الأصل ومحوره هو محور « y » الشكل ١٣ ـ ٢ ـ ٢ يبين منحنى هذا القطع .

فى هذه الحالة تقع البؤرة « F » عند (0, p) (حيث $p \neq 0$) بينما نجد ان الدليل يوازى محور « x » ومعادلته هى $y = -p$

فاذا كانت $P(x, y)$ هى نقطة تقع على القطع , $P'(x, -p)$ العمود من « P » على الدليل فان معادلة القطع المكافىء هى :

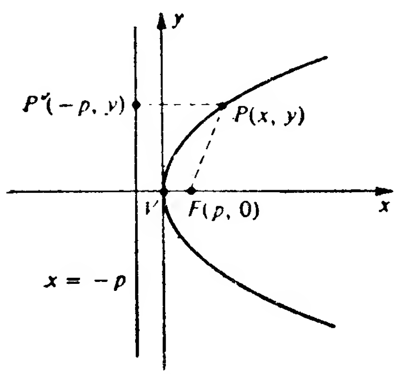
اى $PF = PP'$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

او $x^2 = 4py$.

وهذه هى الصورة القياسية للقطع المكافىء الذى بؤرته عند النقطة $F(0, p)$ والدليل $y = -p$. واذا كانت $p > 0$ فان القطع يكون مفتوحا لأعلى كما فى شكل ١٣ ـ ٢ ـ ٢

اما اذا كانت $p < 0$ فان القطع يكون مفتوحا لأسفل .



$y^2 = 4px$

شكل ١٢ ـ ٢ ـ ٣

(ب) اذا كانت الراس عند نقطة الأصل ومحوره هو محور « x » .
بطريقة مماثلة فان الراس $V(0, 0)$ بينما البؤرة $F(p, 0)$ حيث $p \neq 0$ ومعادلة الدليل $x = -p$ باستخدام نفس الطريقة السابقة نحصل على $y^2 = 4px$

واذا كانت $p > 0$ فان المنحنى يكون مفتوحا لليمين كما فى الشكل اما اذا كانت $p < 0$ فان المنحنى يكون مفتوحا لليسار .

مثال ١٣ ـ ٢-١ :

اوجد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافىء $y^2 = -6x$ وارسم المنحنى

الحـل :

هذا القطع فى الصـــــورة القياسية حيث $4p = -6$

ومنها نجد :

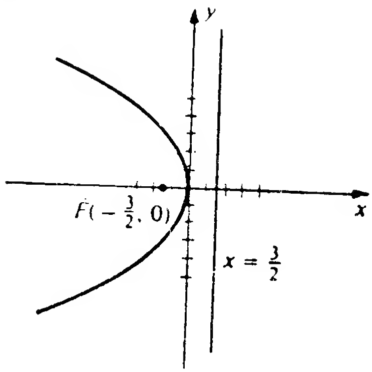
$$p = -3/2$$

وعليه نجد البؤرة هى :

$$F(-3/2, 0)$$

بينما معادلة الدليل هى :

$$x = 3/2$$



$y^2 = -6x$.

شكل ١٣ ـ ٢ ـ ٤

والرسم كما هو واضح من شكل ١٣ ـ ٢ ـ ٤ ونراه مفتوحا الى اليسار وذلك لأن « p » سالبة

مثال ١٣ ـ ٢ ـ ٢ :

اوجد معادلة القطع المكافىء المفتوح لأعلى وراسه عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة $P(-3, 7)$

الحـل :

هذا القطع يأخذ الصورة القياسية $x^2 = 4py$

بالتعويض بالنقطة $P(-3, 7)$ فى معادلة المنحنى نحصل على :

$(-3)^2 = 4p(7)$ $\quad\quad$ $\therefore \quad p = 9/28$

وتكون معادلة القطع هى :

$x^2 = 9/7\, y$ $\quad\quad$ $\therefore \quad 7x^2 = 9y$

(جـ) اذا كانت الراس $V(h, k)$ والمحـــور يوازى محور « y » وهو $x = h$

فى هذه الحالة تكون البؤرة عند $F(h, k+p)$ بينما معادلة الدليل هى $y = k - p$.

ومسقط العمود الساقط من النقطة $P(x, y)$ على الدليل هو $P'(x, k - p)$.

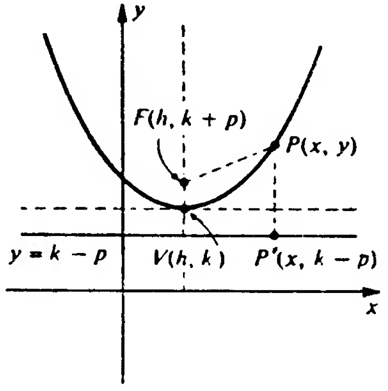
ومن تعريف القطع المكافىء $PP' = PF$ نحصل على

$$\{(x - h)^2 + (y - k - p)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{(x - x)^2 + (y - k + p)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

التى يمكن اختصارها الى :

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$



شكل ١٣ – ٢ – ٥

والمنحنى يكون مفتوحا لأعلى اذا كانت $p > 0$ أما اذا كانت $p < 0$ فان المنحنى يكون مفتوحا لأسفل وعموما تكون المعادلة فى الصورة

$$y = ax^2 + bx + c$$

(د) اذا كانت الراس $V(h, k)$ والمحور يوازى محور « x » وهو $y = k$ بنفس الطريقة المذكورة فى (جـ) نجد أن المعادلة للقطع المكافىء هى :

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

والدليل فى هذه الحالة معادلته $x = h - p$. وفى حالة $p > 0$ فان المنحنى يكون مفتوحا لليمين . أما اذا كانت $p < 0$ فان المنحنى يكون مفتوحا لليسار .

وعموما تكون معادلة مثل هذا القطع فى الصورة

$$x = ay^2 + by + c$$

حيث a, b, c ثوابت .

مثال ١٣ – ٢ – ٣ :

ادرس المنحنى الذى معادلته $2y = x^2 + 8x + 22$

الحل :

هذه المعادلة يمكن أن تحول الى الحالة (جـ) وذلك كما يلى :

$$x^2 + 8x = 2y - 22$$

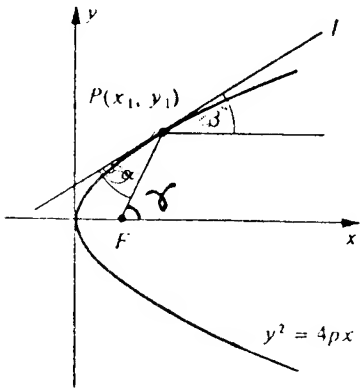
باكمال المربع فى الطرف الايسر نحصل على :

$$x^2 + 8x + 16 = 2y - 22 + 16$$

$$(x + 4)^2 = 2(y - 3)$$

وهى معادلة قطع مكافىء راسه عند النقطة $p = \frac{1}{2}$, $V(-4, 3)$
والقطع المكافىء مفتوح لأعلى لأن p موجبة .

ومحوره يوازى محور y ومعادلته $x + 4 = 0$ والدليل للقطع معادلته .
$y = 2\frac{1}{2}$



شكل ١٢ - ٢ - ٦

١٢ - ٢ - ٣ معادلة المماس للقطع المكافىء :

اذا وقعت النقطة $P(x_1, y_1)$ على القطع المكافىء $y^2 = 4px$ ومر بهذه النقطة مماس . فان ميل المماس للقطع عند هـــذه النقطة يمكن حسابه من قيمة تفاضل الدالة عند هذه النقطة نجد :

حيث : $yy' = 2p$

فان الميل $m = (y')_{x_1, y_1} = (2p/y_1)$

وعليه تكون معادلة المماس هى

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = (2p/y_1)$$

$$\therefore \quad yy_1 - y_1^2 = 2px - 2px_1$$

وحيث أن $P(x_1, y_1)$ تحقق معادلة القطع فينتج أن $y_1^2 = 4px_1$
فبالتعويض فى المعادلة الأخيرة لنحصل على معادلة المماس .

$$yy_1 = 2p(x + x_1)$$

أما اذا كانت معادلة القطع المكافىء هى $x^2 = 4py$ فان معادلة المماس للقطع عند النقطة $P(x_1, y_1)$ هى $xx_1 = 2p(y + y_1)$,

ويمكن استخدام هذه الطريقة المبينة سالفا لاستنتاج معادلة المماس للقطع العام عند أى نقطة .

مثال ١٣ ــ ٢ ــ ٤ :

اوجد معادلة المماس للقطع المكافىء $2y = x^2 + 8x + 22$ عند النقطة $(-2, 5)$.

الحـل :

نوجد ميل المنحنى عند هذه النقطة وذلك بتفاضل الدالة

$$\therefore \quad 2y' = 2x + 8 \qquad\qquad \therefore \quad y' = x + 4$$

ثم نعوض عن النقطة $(-2, 5)$ فنحصل على $m = (-2) + 4 = 2$

وتكون معادلة المماس عند هذه النقطة هى $y - 5 = 2(x + 2)$

$$\therefore \quad y - 2x - 9 = 0$$

مثال ١٣ ــ ٢ ــ ٥ المرآة المكافئة :

اثبت ان الزاوية المحصورة بين المماس عند نقطة ما والموازى لمحور القطع عند هذه النقطة تساوى الزاوية المحصورة بين المماس والخط الواصل بين هذه النقطة والبؤرة .

الحـل :

المطلوب اثبات ان $\alpha = \beta$ فى الشكل ١٣ ــ ٢ ــ ٦ . وهذا يعنى ان الشعاع الساقط من البؤرة على سطح القطع المكافىء يرتد موازيا لمحوره .

سنأخذ معادلة القطع فى الصورة $y^2 = 4px$ (وليس هناك أى تخصيص اذ أن هذه الخاصية عامة لأى قطع مكافىء) . فمن الملاحظ ان β هى زاوية ميل المماس على الأفقى اى ان : $\tan\beta = (2p/y_1)$

ميل المستقيم FP هو

$$\tan\gamma = \frac{y_1}{x_1 - p}$$

ولكن $\alpha = \gamma - \beta$ نجد ان :

$$\tan\alpha = \frac{\tan\gamma - \tan\beta}{1 + \tan\gamma\tan\beta} = \frac{(y_1)/(x_1 - p) - (2p/y_1)}{1 + 2p/(x_1 - p)}$$

$$= \frac{y_1^2 - 2p(x_1 - p)}{y_1(x_1 - p + 2p)} = \frac{4px_1 - 2px_1 + 2p^2}{y_1(x_1 + p)}$$

وذلك لأن $y_1^2 = 4px_1$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{2p(x_1 + p)}{y_1(x_1 + p)} = \frac{2p}{y_1} = \tan\beta$$

اى ان . $\alpha = \beta$

١٣ ــ ٣ القطع الناقص Ellipse

تظهر اهمية هذا المنحنى فى انه يمثل الافلاك التى تتخذها الكواكب فى دورانها حول النجوم . اذ انه يمكن اثبات ان حركة جسيم واقع تحت تأثير قانون التربيع العكسى هو قطع ناقص تحت مجموعة من الظروف .

١٣ ــ ٣ ــ ١ تعريف :

يتكون القطع الناقص من فئة النقط الواقعة فى مستوى والتى يكون مجموع المسافة بين أى من هذه النقط ونقطتين ثابتين فى المستوى (البؤرتين) مقدارا ثابتا .

١٣ ــ ٣ ــ ٢ الصورة القياسية القطع الناقص :

يمكننا وضع معادلة القطع الناقص فى صورة قياسية وذلك اذا اخترنا الخط الواصل بين النقطتين الثابتين (البؤرتين Foci) F, F' منطبقا على المحور السينى واذا اخترنا منتصف FF' منطبقا على نقطة الأصل وهو الذى نطلق عليه مركز القطع centre . فاذا كانت المسافة $FF' = 2c$ حيث $c > 0$ فان $F(c, 0)$ بينما $F'(-c, 0)$. وحسب التعريف فان النقطة $P(x, y)$ تقع على القطع الناقص اذا كان

$$PF + PF' = 2a$$

حيث « a » مقدار ثابت موجب وحيث $a > c$.

وهذا يعنى أن :

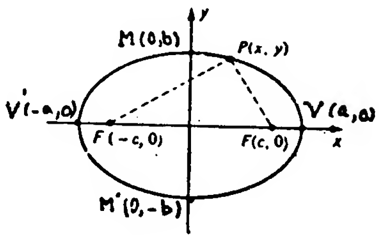
$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

وبعد التربيع والاختصـــــار نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

وللسهولة نكتب $b^2 = a^2 - c^2$

حيث $b > 0$



شكل ١٣ – ٣ – ١ القطع الناقص

فتصبح معادلة المنحنى فى الصورة القياسية

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

وهو القطع الناقص الذى تقع بؤرتاه على المحور الســـينى ومركزه عند نقطة الأصل ولايجاد تقاطع المحور السينى مع القطع نضع $y = 0$

فنحصل على $\frac{x^2}{a^2} = 1$ أى ان نقطتى التقاطع هما $V\ (a, 0)$ ، $V'\ (-a, 0)$

اللتان تسميان براسى القطع Vertices . ويطلق على VV' بالمحور الأكبر major axis وطوله $= 2\,a$.

بينما يتقاطع المحور الصادى مع القطع عند النقطتين $M\ (0, b)$ ، $M'\ (0, b)$ ويسمى MM' بالمحور الأصغر minor axis وطوله $2\,b$.

ملاحظات ١٣ ـ ٣ ـ ١ :

١ ـ يلاحظ أن المحور الاكبر > المحور الأصغر وذلك لأن $a > b$.

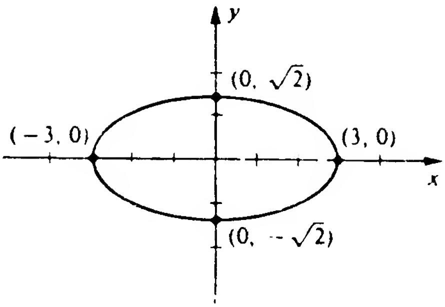
٢ ـ يلاحظ أيضا انه اذا كانت النقطـــة $P\ (x, y)$ تقع على القطع الناقص فان النقط $P_1\ (-x, y)$, $P_2\ (+x, -y)$, $P_3\ (-x, -y)$ تقع أيضا على القطع وذلك لأن المنحنى متماثل بالنسبة لمحورى x, y

مثال ١٣ ـ ٣ ـ ١ :

ابحث وارسم منحنى الدالة $4\,x^2 + 18\,y^2 = 36$

الحـل :

نقسم على (36) لكى نحصل على الصورة القياسية



$4x^2 + 18y^2 = 36$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

وبذلك يكون $a^2 = 9$, $b^2 = 2$.

اى ان $a = 3$, $b = \sqrt{2}$.

ومن ثم نجد ان راسى القطع عند النقطتين

$V'(-3, 0)$, $V(3, 0)$

بينمــا نهايتى المحور الأصفر عند النقطتين $M'(0, -\sqrt{2})$, $M(0, \sqrt{2})$

وكذلك نحصل على $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7$

اى ان $c = \sqrt{7}$

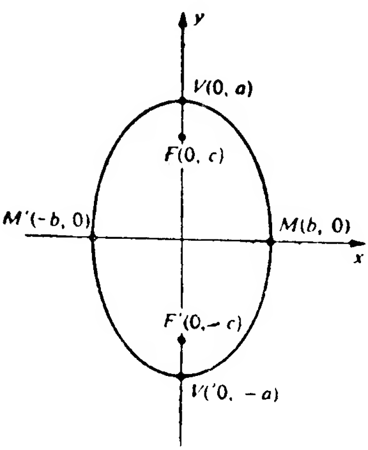
وتكون البؤرتان عند $F'(-\sqrt{7}, 0)$, $F(\sqrt{7}, 0)$

ملاحظة ١٣ ـ ٣ ـ ٢ :

فى بعض الأحيــان يكون من الأحسن ان نختار محور « y » منطبقا على المحور الأكبر للقطــع الناقص . وتكون معــادلة القطع الناقص فى هذه الحالة هى

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a > b.$$

وتكون الراسان عند النقطتين $V'(0, -a)$, $V(0, a)$ ونهايتا المحور الأصغر واقعتين عندالنقطتين $M'(-b, 0)$, $M(b, 0)$. والمركزعند نقطة الأصل والمنحنى يتضـح فى الشكل ١٣ ـ ٣ ـ ٣



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

شكل ١٣ ـ ٣ ـ ٣

مثال ١٣ ـ ٣ ـ ٢ :

ارسم منحنى القطع $9x^2 + 4y^2 = 25$

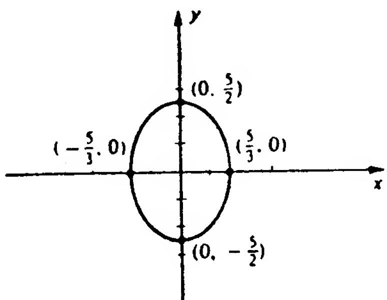
الحـل :

بالقسم على (25) لكى نحصل على الصورة القياسية

$$\frac{x^2}{(25/9)} + \frac{y^2}{(25/4)} = 1$$

وهو عبارة عن قطع ناقص مركزه عند نقطة الأصل . يتقاطع المنحنى مع المحور السينى عند $x = \pm 5/3$ اى $9x^2 = 25$

بينما يتقاطع مع المحور الصادى عند $y = \pm 5/2$ اى $4y^2 = 25$



الشكل ١٣ ـ ٣ ـ ٤

وحيث أن $5/2 > 5/3$ فان هذا يعنى أن المحور الأكبر ينطبق على محور « y » . ورسم المنحنى يظهر فى الشكل ١٣ ـ ٣ ـ ٤

مثال ١٣ ـ ٣ ـ ٣ :

أوجد معادلة القطع الناقص الذى راسيه عند $(\pm 4, 0)$ وبؤرتيه عنـد $(\pm 2, 0)$

الحـل :

فى هذه الحالة $c = 2 \ , \ a = 4$

فيكون $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$

وتكون المعادلة هى :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

١٣ ـ ٣ ـ ٣ اذا كان مركز القطع عند النقطة $C\ (h, k)$

اذا انطبق المحور الموازى لمحور x $(y = k)$ على المحور الأكبر بينما انطبق المحور الأصغر على المحور الموازى لمحور y $(x = h)$ فان معادلة القطع فى هذه الحالة تصبح

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

مثال ١٣ ـ ٣ ـ ٤ :

حل المعادلة $9 x^2 + 4 y^2 + 36 x - 8 y + 4 = 0$

الحل :

نحاول ان نكمل مربعات فى x, y فتكتب المعادلة فى الصورة

$$9 (x^2 + 4 x) + 4 (y^2 - 2 y) + 4 = 0$$

ونكمل المربعات لنحصل على

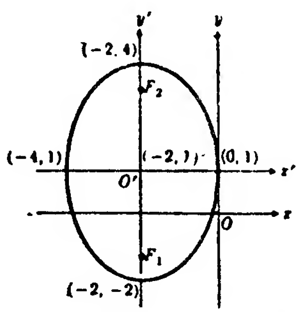
$$9 (x^2 + 4 x) + 4 (y^2 - 2 y) + 4 = 0$$

او

$$9 (x + 2)^2 + 4 (y - 1)^2 = 36$$

ونحولها الى الصورة القياسية

$$\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$$



The ellipse $9x^2 + 4y^2 + 36x - 9y + 4 = 0$.

شكل ١٣ ـ ٣ ـ ٥ منحنى القطع

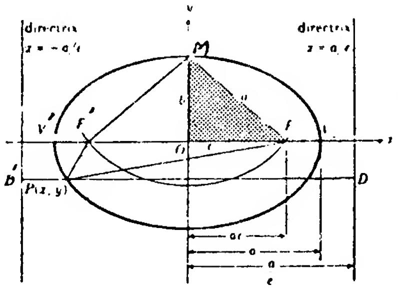
وهى معادلة قطع ناقص مركزه عند النقطة $(-2, 1)$. ومحوره الأصغر ينطبق على محور يوازى محور « x » وطوله 4 بينما محوره الأكبر يوازى محور « y » وطوله 6 والمسافة بين البؤرتين

$$2 c = 2 \sqrt{a^2 - b^2} = 2 \sqrt{5}.$$

١٣ – ٣ – ٤ الاختلاف المركزى Eccentrivity :

يعرف الاختلاف المركزى على أساس انه النسبة بين c, a.
ويرمز له بالرمز « e »

أى $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ او $b^2 = a^2 (1 - e^2)$



الشكل ١٣ – ٣ – ٦ الدليلان

ونلاحظ أن « e » تنتمى الى الفترة [0, 1] .

اذا ثبتنا « a » بينما غيرنا « c » على النطاق [0, a] فان القطع الناقص يتغير شكله وذلك كما يلى

(أ) عندما $c = 0$ فان $e = 0 , a = b$ ويتحول القطع الى دائرة نصف قطرها « a »

(ب) عندما $c = a$ فان $e = 1 , b \to 0$ ويتحول القطع الى الخط المستقيم الواصل بين البؤرتين FF′ .

أى كلما بعدت « e » عن الصفر كلما ابتعد شكل القطع الناقص عن شكل الدائرة .

١٣ – ٣ – ٥ دليلا للقطع Directrices :

اذا تذكرنا ان القطع المكافىء له بؤرة واحدة ودليل واحد . بينما فى القطع الناقص فان له بؤرتان ولذلك نتوقع أن يكون له دليلان . وهذان الدليلان يكونان عمودين على المحور الأكبر وعلى البعدين $\pm a/e$ من المركز انظر شكل ١٣ – ٣ – ٦

١٣ – ٣ – ٦ تعريف آخر للقطع الناقص :

يمكننا كتابة تعريف للقطع الناقص مشابه لتعريف القطع المكافىء وذلك باستخدام الاختلاف المركزى والدليل . هذا التعريف كما يلى :

تقع النقطة P (x, y) على القطع الناقص اذا كان البعد بين النقطة « P » والبؤرة يتناسب مع البعد بين النقطة « P » والدليل القريب من البؤرة وثابت التناسب هو « e » .

اى انه حسب الشكل ١٣ — ٣ — ٦ يكون

$$PF = e\,P\,D \quad , \quad PF' = e\,P\,D'$$

فاذا كانت $P\,(x, y)$, $D\,(a/e, y)$, $F\,(c, 0)$ فيكون

$$PF = \{ (x - c)^2 + y^2 \}^{\frac{1}{2}} , PD = \{ (x - a/e)^2 \}^{\frac{1}{2}} = (a/e - x)$$

$$\therefore \quad (x - c)^2 + y^2 = e^2\,(a/e - x)^2$$

$$\therefore \quad x^2\,[1 - e^2] - 2\,x\,(c - a\,e) + y^2 = a^2 - c^2 = b^2$$

ولكن $c = a\,e$, $b^2 = a^2\,(1 - e^2)$ فبالقسمة على « b^2 »

نجد معادلةالقطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ملاحظات ١٣ — ٣ — ٣ :

١ — يجب ان يرتبط كل دليل بالبؤرة القريبة منه فالبؤرة $F\,(c, 0)$ ترتبط بالدليل $x = a/e$ بينما $F\,(-c, 0)$ ترتبط بالدليل $x = -\,a/e$

٢ — يمكننا التعبير عن ابعاد مواقع البؤرة والراس والدليل عن المركز بدلالة نصف المحور الأكبر « a » والاختلاف المركزى « e » حيث :

(أ) البؤرة على بعد $(\pm\,a\,e)$ من المركز $(\,(a\,e) < a)$.

(ب) الراس على بعد $(\pm\,a)$ من المركز

(جـ) الدليل على بعد $(\pm\,a/e)$ من المركز $(\,(a/e) > a\,)$

٣ — نلاحظ أن « الدليل والبؤرة » تربط بين القطـــاعات المختلفة (المكافىء والناقص والزائد الذى سنناقشه حالا) وذلك لما يلى .

اى نقطة $P\,(x, y)$ بحيث يكون البعد PF عن نقطة ثابتة (البؤرة) يتناسب مع البعد PD عن محور ثابت (الدليل) بحيث أن :

$$PF = e\,PD$$

حيث « e » ثابت التناسب فان المحل الهندسى للنقطة « P » يكون :

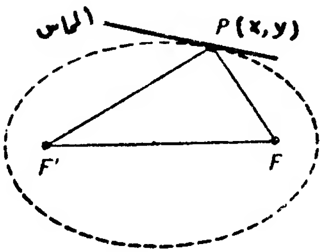
(أ) قطعا مكافئا اذا كان $e = 1$

(ب) قطعا ناقصا اذا كان $e < 1$

(جـ) قطعا زائدا اذا كان $e > 1$.

١٣ – ٣ – ٧ معادلة المماس للقطع الناقص :

اذا كان لدينا القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ فان معادلة المماس لهذا القطع عند النقطة $P(x_1, y_1)$ الواقعة على القطع يمكن استنتاجها كما يلى :



شكل ١٣ – ٣ – ٧ المماس

ميل المماس يعطى من قيمة التفاضل عند النقطة « P » اى :

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0$$

$$\therefore \quad m = (y')_p = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1}{y_1}\right)$$

ومعادلة المماس هى :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$$

$$\therefore \quad \frac{y_1}{b^2}(y - y_1) + \frac{x_1(x - x_1)}{a^2} = 0$$

وحيث أن « P » تحقق معادلة القطع فنحصل على معادلة المماس للقطع عند $P(x_1, y_1)$ وهى :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

مثال ١٣ ـ ٣ ـ ٥ :

أوجد معادلة المماس للقطع $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{9} = 1$ عند النقطة $(2, 2\sqrt{5})$

الحـل :

معادلة القطع هى

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$$

ويكون المماس عند النقطة $(2, 2\sqrt{5})$

$$\frac{2x}{9} + \frac{2\sqrt{5}\,y}{36} = 1$$

(لنترك للقارىء استنتاجها بدون اللجوء الى الصيغة الأخيرة) .

وسنناقش الآن ثالث هذه القطاعات وهو القطع الزائد

١٣ ـ ٤ القطع الزائد Hyperbola :

هذا القطع له تطبيقاته فى مجالات الفيزياء . اذ أن جسيم ألفا عند اطلاقه على نواة ذرة يتخذ هذا المنحنى كمسار له . ويتشابه تعريف القطع الزائد مع تعريف القطع الناقص مع اختلاف هو انه بدلا من حاصل الجمع يتحول الى باقى الطرح (أو الفرق) بين البعدين كما يلى :

١٣ ـ ٤ ـ ١ تعريف :

تقع فئة النقط (الواقعة فى مستوى) على قطع زائد اذا كان الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتين (البؤرتين) مقدارا ثابتا .

فاذا اخترنا كما فى الشكل مجموعة من الاحداثيات بحيث تقع البؤرتان عند النقطتين $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$. فتقع النقطة $P(x, y)$ على القطع اذا كان

$$FP - F'P = 2a \qquad (1)$$

فلكى يكون لدينا شكلا لاينطبق على المحور السينى فاننا نحتاج الى $a < c$. بالتعويض فى (١) نحصل على :

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

وبنقل الجذر الثانى الى الطرف الأيمن ثم التربيع نحصل على :

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x + c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

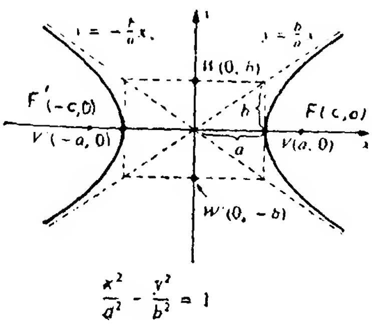
وباختصار هذه المعادلة ثم تربيع طرفى المعادلة الناتجة مرة أخرى وبعد الاختصار نحصل على :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

وتصاغ هذه المعادلة فى الصورة القياسية

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (b^2 = c^2 - a^2 > 0).$$

للقطع الزائد الذى تقع بؤرتاه على محور « x » ومركزه عند نقطة الأصل . ويتقاطع هذا القطع مع المحور السينى عند $\pm a$. وهما الراسان $V(a, 0), V'(-a, 0)$ ويسمى الخط VV' بالمحور المستعرض للقطع Transverse axis.



شكل ١٣ - ٤ - ١ القطع الزائد

ونلاحظ أن القطع الزائد السابق لا يقطع المحور الصادى (انظر الشكل ١٣ - ٤ - ١) .

١٣ - ٤ - ٢ الخطان التقاربيان Asymptotes :

هذان الخطان هما المماسان للمنحنى فى اللانهاية

فاذا أخذنا الخط $y = (b/a)x$ فان النقطة الواقعة عليه $P'(x, y_1)$

والنقطة $P(x, y)$ الواقعة على القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

فنجد أن المسافة

$$y_1 - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

تؤول الى الصفر عندما تؤول $x \to \pm\infty$ (لنترك للقارىء اثبات هذا) كذلك نجد أن الخط $y = -(b/a)x$ يمس القطع أيضا فى اللانهاية .

نلاحظ أن معادلة الخطين التقاربيين هى أن نضع الطرف الأيمن لمعادلة القطع (المقدار الثابت) مساويا للصفر . أى أن معادلة الخطين التقاربيين هى :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

والحل لها عبارة عن الخطين التقاربيين $y = \pm \frac{b}{a} x$.

ملاحظات ١٣ ــ ٤ ــ ١ :

(أ) يمس الخط $y = \frac{b}{a} x$ الفرع الأيمن للقطع عندما $x \to \infty$
بينما يمس الطرف الأيسر عندما $x \to -\infty$

(ب) بينما يمس الخط $y = -\frac{b}{a} x$ القطع بطريقة معاكسة

(ج) يطلق على الخط الواصل من $W\ (0, b)$ الى $W'\ (0, -b)$ بالمحور المرافق Conjugate axis

(د) اذا رسمنا خطوط موازية للمحور المستعرض والمحور المرافق تمر بالراسين $V\ (a, 0)$, $V'\ (-a, 0)$ وكذلك بالنقطتين $W\ (0, b)$, $W'\ (0, -b)$ يتكون مستطيل .

(هـ) ينطبق قطرا هذا المستطيل والخطان التقاربيان للقطع

(و) يستخدم هذان الخطان وكذلك المستطيل فى المساعدة فى رسم القطع الزائد

(ز) ليس من الضرورى أن تكون $a > b$. اذا يمكن ان تكون $a \leqslant b$.

مثال ١٣ ــ ٤ ــ ١ :

ادرس المنحنى الممثل بالمعادلة $9x^2 - 4y^2 = 36.$

الحـــل :

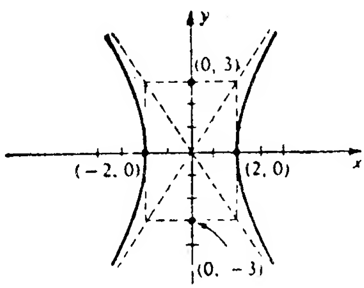
بقسم الطرفين على (36) نحصل على الصورة القياسية

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

حيث $a = 2 \quad \therefore \quad a^2 = 4 \quad , \quad b = 3 \quad \therefore \quad b^2 = 9$

فيكون الراسان عند $(\pm 2, 0)$ بينما نهايتى المحور المرافق عند $(0, \pm 3)$

يمكن باستخدام هـذه النقط أن نكون مستطيلا يكون امتداد القطرين ممثلا للخطين التاربيين . انظر الشكل ١٣ ــ ٤ ــ ٢



$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

شكل ١٣ ــ ٤ ــ ٢

معادلتا الخطين التقـــاربيين تصيران

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$$

$$\therefore \quad y = \pm 3/2\, x.$$

كذلك نجد أن : $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$

وتكون البؤرتان عند النقطتين $(\pm \sqrt{13}, 0)$.

(لاحـــظ أن « b » اكبر من « a » هنا)

مثال ١٣ ــ ٤ ــ ٢ :

أوجد المعادلة والبؤرتين والخطين التقاربيين للقطع الذى تقع راسيه عنـــد $(\pm 3, 0)$ ويمر بالنقطة $P\ (5, 2)$.

الحـــل :

من معطيات المثال نجد ان $a = 3$ فيمكننا صياغة معادلة القطع فى الصورة

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

بالتعويض بالنقطة نحصل :

$$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1 \therefore \frac{4}{b^2} = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9} \therefore b^2 = \frac{9}{4}$$

وتكون معادلة القطع هى $(x^2 - 4y^2 = 9)$. $\frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1$

والخطان التقاربيان معادلاتهما $\frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 0$

أى ان الخطين هما : $y = \pm \frac{1}{2} x$

ولايجاد البؤرتين نجد ان :

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

اى ان البؤرتين تقعان عند $(\pm 5/2, 0)$.

(لاحظ ان $a > b$ فى هذا المثال)

ملاحظات ١٣ ـ ٤ ـ ٢ :

اذا وقعت بؤرتا القطع عند النقطتين $(0, \pm c)$ على المحور الصادى فان معادلة القطع فى هذه الحالة تصير $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ويقطع القطع المحور الصادى عند الراسين $(0, \pm a)$ حيث يكون محوره المستعرض . اما المحور المرافق فينطبق على المحور السينى بين النقطتين $(\pm b, 0)$. بينما يكون خطاه التقاربيان هما :
$y = \pm (a/b) x$

مثال ١٣ ـ ٤ ـ ٣ :

ادرس المنحنى الذى معادلتا :

$$4y^2 - 2x^2 = 1$$

الحـل :

تحول هذه المعادلة الى الصورة القياسية $\frac{y^2}{(\frac{1}{4})} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1$

$$\therefore \quad a = \tfrac{1}{2}, \; b = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ومركزه عند نقطة الأصل وراساه عند النقطتين $(0, \pm \frac{1}{2})$

بينما نهايتى محوره المرافق تقعان عند $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

ونجد ان : $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

اى ان البؤرتين تقعان عند $(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$

معادلتا الخطين التقاربيين هما : $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} x .$

فى سبيل المناقشة التالية للقطع الزائد سنفترض ان معـــادلته فى الصورة القياسية

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

١٣ ـ ٤ ـ ٣ الإختلاف المركزى والدليلان :

تمشيا مع ماســـــقناه فى حالة القطع الناقص (١٣ ـ ٣ ـ ٤ ، ١٣ ـ ٣ ـ ٥) يمكننا أن نعرف الاختلاف المركزى« e » حيث $e = c/a$

وحيث ان $c \geqslant a$ فان الاختلاف المركزى للقطع الزائد لايمكن ان يقل عن الوحدة .

اما الدليلان فمعادلاتهما $x = \pm (a/e)$

واضح انهما لايمكن ان يقطعا منحنى القطع . ونلاحظ انه باستخدام a, e فانه يمكننا تعيين مواقع الدليلين ، والراسين والبؤرتين :

(أ) الدليلان عند

$(a/e < a) \quad x = \pm (a/e)$

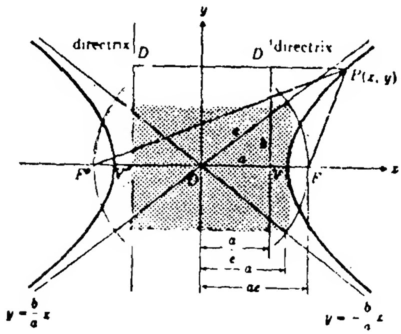
(ب) الراسان عند

$x = \pm a$

(جـ) البؤرتان عند

$(a\,e > e) \quad x = \pm a\,e$

انظر الشكل المقابل (شكل ١٣ ـ ٤ ـ ٣) .



شكل ١٣ ـ ٤ ـ ٣ الدليلان والبوزنان

يمكننا أيضا باستخدام « e » والبؤرة والدليل أن نقدم تعريفا آخر لمنحنى القطع الزائد هو مايلى :

١٣ ـ ٤ ـ ٤ تعريف آخر للقطع الزائد :

فئة النقط المستوية التى يتناسب بعد أى منهـا عن نقطة ثابتة (البؤرة) مع بعدها عن خط ثابت (الدليل) بحيث يكون ثابت التناسب (e) اكبر من الوحدة تقع على منحنى قطع الزائد .

فحسب الشكل (١٣ ـ ٤ ـ ٣) نفرض أن النقطة P (x, y) والنقطة F (c, 0) والنقطة D (a/e, y) فيكون حسب التعريف السابق .

$$PF = e\,PD \,, \quad (PF' = e\,PD')$$

وهذا يعنى

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = e\,\sqrt{(x - a/e)^2 + (y - y)^2}$$

$$\therefore \quad (x - c)^2 + y^2 = e^2\,(x - a/e)^2.$$

$$\therefore \quad y^2 + x^2\,(1 - e^2) + 2\,x\,(-c + ea) + c^2 - a^2 = 0$$

وحيث أن :

$$c^2 - a^2 = b^2 \quad , \quad c = a\,e$$

$$1 - e^2 = 1 - (c^2/a^2) = -(c^2 - a^2)/a^2 = -b^2/a^2.$$

فتصير المعادلة

$$y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2 = 0$$

وهى الصورة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نلاحظ هاهنا اننا نتوخى نفس الملاحظات التى سبقناها مع القطع الناقص (اى الملاحظات ١٣ ـ ٣ ـ ٣) .

مثال ١٣ ـ ٤ ـ ٤ :

اثبت أن معادلة المماس للقطع $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ عند النقطة $P(x_1, y_1)$ هى $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

الحـل :

نفاضل معادلة القطع ثم نحصل على $(y')_p$ التى تمثل ميل المماس ثم بعد ذلك نحصل على معادلة المماس . نطبق هذا فنحصل على :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \therefore \quad \frac{yy'}{b^2} = \frac{x}{a^2} \quad \therefore \quad y' = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}$$

وميل المماس عند النقطة $P(x_1, y_1)$ هو

$$m = (y')_p = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$$

ومعادلة المماس هى :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$$

$$\therefore \quad \frac{yy_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2}$$

وحيث ان $P(x_1, y_1)$ تحقق معادلة القطع فاننا نحصل على :

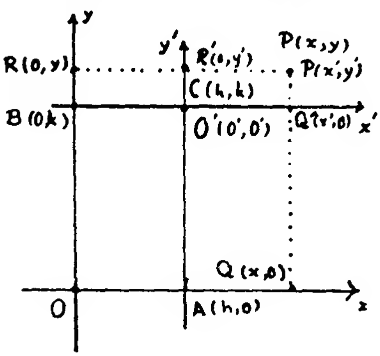
$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

بعد هذه المناقشة للصور القياسية للقطاعات المخروطية قد يحدث ان نعالج معادلة عامة من الدرجة الثانية ولاختصار مثل هذه المعادلة العامة الى الصورة القياسية قد نحتاج الى نقل المحاور موازية لنفسها الى نقطة اخرى أو دوران المحاور نفسها حول نقطة الأصل ولحاجتنا الى النقل والدوران سنناقش ذلك فى البند التالى الذى نطلق عليه تحويل المحاور .

١٣ ـ ٥ تحويل المحاور Transformation of axes :

١٣ ـ ٥ ـ ١ نقل المحاور موازية لنفسها Translation :

لنفرض نقطة $C(h, k)$ واقعة فى المستوى xy . ولنفرض اننا أوجدنا مجموعة احداثيات جديدة لها نقط الأصل (O') منطبقة على (C) وبحيث يكون محور (x') موازيا لمحور « x » وكذلك محور (y') موازيا لمحــــور « y » وبحيث تكون وحدات الطول واحدة على المحـــاور المتوازية . والأجزاء الموجبة تماثل الأجزاء الموجبـــــة والشكل ١٣ ـ ٥ ـ ١ يوضح مثل هذا النقل . وللتفرقة بين التمثيل



شكل ١٣ ـ ٥ ـ ١
نقل المحاور موازية لنفسها

الاحداثيات المختلفة سنستخدم (x', y') لتمثل الاحداثيات فى المجموعة $x'\,y'$ بينمـــا (x, y) لتمثل الاحداثيات فى المجموعة xy فحسب الرســم فى الشكل ١٣ ـ ٥ ـ ١ نجد ان :

$$x = OQ = OA + AQ = OA + O'Q' = h + x'$$

وكذلك :

$$y = OR = OB + BR = OB + O'R' = k + y'$$

اى انه اذا كانت (x, y) هى احداثيات نقطة « P » بالنســـبة الى مجموعة الاحداثيات xy و (x', y') هى احداثيات نفس النقطة « P »

مثال ١٣ ـ ٥ ـ ٤ :

اذا ادرنا مجموعة المحاور بزاوية 45° فادرس وارسم معادلة المنحنى $yx = 1$.

الحل :

فى هذا المثال فان $\phi = 45^\circ$

$$\therefore \quad x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

فبالتعويض فىمعادلة المنحنى نجد :

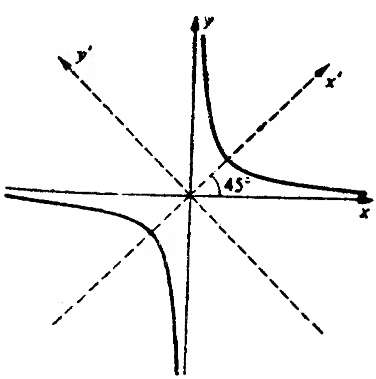
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x' - y') \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x' + y') = 1.$$

$$\therefore \quad \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

وهو قطع زائد راساه عند $(\pm\sqrt{2}, 0)$ فى المجموعة $x'\,y'$.

من الملاحظ ان محورى y , x هما الخطان التقاربيان للقطع .

ويطلق على هذا القطع بالذات « القطع الزائد القائم » منسوبا الى خطيه التقاربيين كمحاور للاحداثيات .



xy = 1

الشكل ١٣ ـ ٥ ـ ٥

١٣ ـ ٥ ـ ٣ حذف حد من المعادلة العامة :

فى هذا المثال اتضح لنا كيف نحذف حدا هو xy . وعلى العموم اذا كانت لدينا المعادلة العامة

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0.$$

حيث $B \neq 0$. فانه يمكننا أن نحذف الحد xy وذلك بادارة المحاور .

فاذا استخدمنا التحويلات (١) نحصل على :

$$A (x' \cos \phi - y' \sin \phi)^2$$
$$+ B (x' \cos \phi - y' \sin \phi) (x' \sin \phi + y' \cos \phi)$$
$$+ C (x' \sin \phi + y' \cos \phi)^2 + D (x' \cos \phi - y' \sin \phi)$$
$$+ E (x' \sin \phi + y' \cos \phi) + F = 0$$

هذه المعادلة يمكن صياغتها فى الصورة

$$A' x'^2 + B' x' y' + C' y'^2 + D' x' + E' y' + F = 0$$

حيث

$$B' = 2 (C - A) \sin \phi \cos \phi + B (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi).$$

فلحذف $x' y'$ نضع $B' = 0$ أى أن :

$$2 (C - A) \sin \phi \cos \phi + B (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 0$$

أو

$$(C - A) \sin 2 \phi + B \cos 2 \phi = 0$$

التى يمكن صياغتها فى الصورة

$$\tan 2 \phi = \frac{B}{A - C} \qquad (2)$$

مثال ١٣ ـ ٥ ـ ٥ :

ادرس وارسم منحنى المعادلة

$$41 x^2 - 24 x y + 34 y^2 - 25 = 0$$

$$y = \frac{(7x + 54) \pm \sqrt{(7x + 54)^2 + 60\,(2x^2 - 10x - 48)}}{30}$$

والمقدار الذى تحت الجذر عبارة عن :

$$169x^2 + 156x + 36 = (13x + 6)^2$$

وعليه نجد أن الحل هو :

$$y = \frac{(7x + 54) \pm (13x + 6)}{30}$$

ويكون أحد المستقيمين هو

$$y = \frac{20x + 60}{30} = \frac{2x + 6}{3}$$

والآخر معادلته

$$y = \frac{-6x + 48}{30} = \frac{-x + 8}{5}$$

وهما خطان مستقيمان يتقاطعان فى نقطة فأوجدها .

مثال ١٣ ـ ٦ ـ ٧ :

ادرس المعادلة $10xy - 14x + 15y - 21 = 0$

الحـل :

هنا نجد

$$A = 0 = C, B = 10, D = -14, E = 15, F = -21$$

ونرى $I_2 = B^2 - 4AC > 0$

بينما

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 5 & 0 & 7\frac{1}{2} \\ -7 & 7\frac{1}{2} & -21 \end{vmatrix} = 0$$

اى ان المعادلة تمثل خطين مستقيمين . ولايجادهما نحلل المعـادلة كما يلى :

$$(2x + 3)(5y - 7) = 0$$

ويكون الخطان هما :

$$2x + 3 = 0 , 5y - 7 = 0$$

راجع المثال ١٣ ــ ٦ ــ ٤ بالنسبة للمستقيمين المتوازيين (او المنطبقين) فى حالة المعادلة

$$. x^2 - 4xy + 4y^2 + F = 0$$

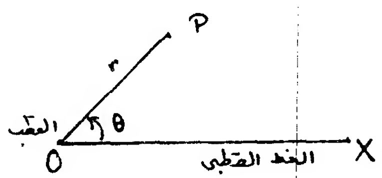
ولكى نكمل موضوع القطاعات المخروطية ننتقل الى كتابة المعادلة للقطاعات المخروطية وذلك باستخدام الاحداثيات القطبية

١٣ ــ ٧ المعادلة القطبية للقطع المخروطى :

١٣ ــ ٧ ــ ١ الاحداثيات القطبية Polar Coordinates :

يؤخذ فى المستوى نقطة ثابتة يطلق عليها القطب « O » ويرسم خط يسمى الخط القطبى (او الخط الابتدائى) « OX » .

اى نقطة « P » فى المستوى يمكن تعيينها بواسطة كميتين : الكمية الأولى عبارة عن البعد بين النقطة « P » والقطب « O » (وهو مقدار موجب) ويطلق عليه : نصف القطر المتجه او البعد القطبى ويرمز له بالرمز « r » واما الكمية الثانية فهى الزاوية التى يصنعها المستقيم « OP » مع الخط القطبى ويطلق عليها بزاوية الاتجاه ويرمز لها بالرمز θ



شكل ١٣ ــ ٧ ــ ١ الاحداثيات القطبية

يقاس البعد « r » بوحدات القياس العادية بينما تقاس θ بالزوايا النصف القطرية والشكل ١٣ ــ ٧ ــ ١ يمثل موقع النقطة « P » فى الاحداثيات القطبية والعلاقة بين الاحداثيات القطبية والكرتيزية المتعامدة معروفة حيث

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta$$

وذلك بأخذ الخط القطبى منطبقا على محور « x » بينما العمودى عليه عند القطب يمثل محور « y » . ويصبح القطب هو نقطة الأصل .

وكمثال بسيط على ذلك الدائرة التى نصف قطرها « a » ومركزها هو نقطة الأصل فمعادلتها فى الاحداثيات الكرتيزية هى :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

بينما فى الاحداثيات القطبية التى يكون المركز فيها هو القطب فتصير المعادلة

$$r = a$$

بعد هذه العجالة السريعة ننتقل الآن الى موضوع بحثنا هنا وهو الصورة القطبية لمعادلات القطاعات المخروطية .

١٣ ـ ٧ ـ ٢ المعادلة القطبية للقطع :

نحدد مجموعة الاحداثيات القطبية بحيث تكون البؤرة « F » منطبقة على القطب والخط الابتدائى (القطبى) منطبقا على محور القطع CX . فاذا كان الدليل هو DC هو الدليل القريب من البؤرة . فانه حسب معادلة القطع فان

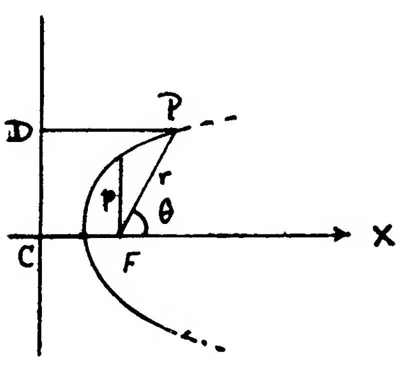
$$FP = e\,PD \qquad (1)$$

حيث « e » هى الاختلاف المركزى للقطع . ولكن $FP = r$ بينما $PD = r \cos \theta + FC.$

ولكن نصف طول الوتر البؤرى العمودى « p » له العلاقة الآتية :

$$p = e \,.\, FC \,.$$

وعليه نجد انه باستخدام هذه المعلومات فى (١) نحصل على :



شكل ١٣ ـ ٧ ـ ٢ المعادلة القطبية للقطع

$$r = e\,[r \cos \theta] + e\,FC = e\,r \cos \theta + p$$

أو يمكن صياغتها فى الصورة

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \,. \qquad (2)$$

وهذه هى المعادلة القطبية للقطع المخروطى حيث« p » هو نصف طول الوتر البؤرى العمودى و « e » الاختلاف المركزى .

ملاحظة ١٣ ـ ٧ ـ ١ :

اذا كان $1 < e$ اى فى حالة القطع الزائد فان المعادلة (٢) تمثل فرعا واحدا فقط من فروع القطع الزائد وهو ذلك الفرع الذى تكون بداخله البؤرة ويشترط لذلك أن $1 - e \cos\theta > 0$ او $\cos\theta < 1/e$

مثال ١٣ ـ ٧ ـ ١ :

اكتب المعادلة القطبية للقطع $x^2/64 + y^2/16 = 1.$

الحـل :

هذه صورة معادلة قطع ناقص مركزه عند نقطة الأصل وحيث

$$a = 8 \quad , \quad b = 4 \quad \therefore \quad e^2 = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \quad , \quad c = 4\sqrt{3}$$

نصف طول الوتر البؤرى العمودى هو عبارة عن الاحداثى الصادى للنقطة الواقعة على القطع واحداثيها السينى هو البؤرة .

احداثيات البؤرتين هى $(\pm 4\sqrt{2}, 0)$

وعليه نجد :

$$\frac{(4\sqrt{2})^2}{64} + \frac{p^2}{16} = 1$$

ومنها نجد : $p = 2\sqrt{2}.$

وتكون المعادلة القطبية هى :

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \cos\theta/\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2} - \cos\theta}$$

١٣ ـ ٧ ـ ٣ صور اخرى للمعادلة القطبية :

فى المعادلة السابقة (٢) أخذنا البؤرة كقطب والدليل القريب من البؤرة. على أنه يمكننا أن نستخدم الدليل البعيد عن القطب وفى هذه الحالة الخلاف بسيط فى طريقة الاستنتاج ونصل الى المعادلة .

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (2)$$